

Devoir surveillé n°01  
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



Exercice 01

1. (a) Remarquons que  $f_1^2 = f_2^2 = f_3^2 = f_4^2 = id$  et que  $f_4^2 = f_5$ . On peut représenter la loi du groupe  $G$  par un tableau à 6 lignes et 6 colonnes portant dans la case d'intersection de la ligne indexé par un élément  $f_i$  de  $G$  et de la colonne indexé par un élément  $f_j$  de  $G$  la valeur du produit  $f_i \circ f_j$ .

$\circ$	$id$	$f_4$	$f_4^2 = f_5$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$id$	$id$	$f_4$	$f_4^2$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_4$	$f_4$	$f_4^2$	$id$	$f_3$	$f_1$	$f_2$
$f_4^2 = f_5$	$f_4^2$	$id$	$f_4$	$f_2$	$f_3$	$f_1$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$id$	$f_4$	$f_4^2$
$f_2$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_4^2$	$id$	$f_4$
$f_3$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_4$	$f_4^2$	$id$

- (b) Il est facile de vérifier que tout élément de  $G$  apparait une fois et une seule dans chaque ligne et chaque colonne de la table. La table montre donc que  $(G, \circ)$  est un groupe.  
 (c) Il est clair qu'un groupe fini est abélien si et seulement si sa table est symétrique par rapport à la diagonale principale. On peut remarquer aussi que, par exemple,  $f_3 \circ f_4 \neq f_4 \circ f_3$ , donc  $(G, \circ)$  est un groupe non commutatif.
2. Le groupe symétrique  $S_3$  est d'ordre  $3! = 6$ . On peut d'écrire explicitement ses six éléments.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut alors dresser la table du groupe symétrique  $S_3$ . On en déduit en particulier que le groupe  $S_3$  n'est pas abélien.

$\circ$	$e$	$\gamma$	$\gamma^2$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
$e$	$e$	$\gamma$	$\gamma^2$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
$\gamma$	$\gamma$	$\gamma^2$	$e$	$\tau_3$	$\tau_1$	$\tau_2$
$\gamma^2$	$\gamma^2$	$e$	$\gamma$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_1$
$\tau_1$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$e$	$\gamma$	$\gamma^2$
$\tau_2$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_1$	$\gamma^2$	$e$	$\gamma$
$\tau_3$	$\tau_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\gamma$	$\gamma^2$	$e$

On sait qu'un isomorphisme de groupes conserve les propriétés algébriques comme l'ordre d'un élément ... on peut vérifier facilement que l'application  $\varphi$  de  $G$  dans  $S_3$  définie par :

$$\varphi(id) = e, \varphi(f_1) = \tau_1, \varphi(f_2) = \tau_2, \varphi(f_3) = \tau_3, \varphi(f_4) = \gamma, \varphi(f_5) = \gamma^2$$

est un isomorphisme de groupes.

## Exercice 02

Il suffit de montrer que tous les éléments non nuls de  $A$  sont inversibles. Soit  $a \in A$  non nul et soit  $\varphi$  l'application de  $A$  dans  $A$  définie par :

$$\forall x \in A, \varphi(x) = ax.$$

$\varphi$  est injective, en effet si  $\varphi(x) = \varphi(y)$ , alors  $ax = ay$  ou encore  $a(x - y) = 0_A$  et comme  $A$  est intègre et  $a \neq 0$ , alors  $x - y = 0_A$ .

D'autre part  $A$  étant fini donc  $\varphi$  est bijective, et donc surjective, et par conséquent il existe  $a' \in A$  tel que  $aa' = 1_A$ , en plus

$$a(a'a) = (aa')a = a,$$

puis, par intégrité,  $a'a = 1_A$ . Donc  $a$  est inversible.

## Exercice 03

1. On a  $0 \in A$ , donc l'ensemble  $A$  est non vide. Il suffit donc de vérifier que  $A$  est un sous-groupe pour l'addition, et que la multiplication est stable.

Soient  $m, n, m', n'$  quatre éléments de  $\mathbb{Z}$ .

$$(m + n\sqrt{2}) - (m' + n'\sqrt{2}) = (m - m') + (n - n')\sqrt{2} \in A.$$

De même

$$(m + n\sqrt{2}) \times (m' + n'\sqrt{2}) = (mm' + 2nn') + (mn' + m'n)\sqrt{2} \in A.$$

2. Remarquons d'abord que pour tout élément  $a$  de  $A$ ,  $\varphi(\varphi(a)) = a$ . Donc  $\varphi$  est une bijection, puisque tout élément de  $A$  a pour antécédent  $\varphi(a)$ .

Il évident que  $\varphi(1) = 1$ .

Montrons maintenant que  $\varphi$  est un morphisme pour l'addition.

$$\begin{aligned} \varphi((m + n\sqrt{2}) + (m' + n'\sqrt{2})) &= \varphi((m + m') + (n + n')\sqrt{2}) \\ &= (m + m') - (n + n')\sqrt{2} \\ &= (m - n\sqrt{2}) + (m' - n'\sqrt{2}) \\ &= \varphi(m + n\sqrt{2}) + \varphi(m' + n'\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Montrons enfin que  $\varphi$  est un morphisme pour la multiplication.

$$\begin{aligned} \varphi((m + n\sqrt{2}) \times (m' + n'\sqrt{2})) &= \varphi((mm' + 2nn') + (mn' + m'n)\sqrt{2}) \\ &= (mm' + 2nn') - (mn' + m'n)\sqrt{2} \\ &= (m - n\sqrt{2}) \times (m' - n'\sqrt{2}) \\ &= \varphi(m + n\sqrt{2}) \times \varphi(m' + n'\sqrt{2}). \end{aligned}$$

3. Soit  $x = m + n\sqrt{2}$  un élément quelconque de  $A$ .

$$N(x) = x\varphi(x) = (m + n\sqrt{2}) \times (m - n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2.$$

Donc  $N$  est bien une application de  $A$  dans  $\mathbb{Z}$ . Montrons que c'est un morphisme pour la multiplication. Soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $A$ .

$$N(xx') = xx'\varphi(xx') = xx'\varphi(x)\varphi(x') = (x\varphi(x))(x'\varphi(x')) = N(x)N(x'),$$

en utilisant le fait que  $\varphi$  est un morphisme pour la multiplication.

4. Si  $N(x) = x\varphi(x) = 1$ , alors  $\varphi(x)$  est inverse de  $x$ , et si  $N(x) = x\varphi(x) = -1$ , alors  $-\varphi(x)$  est inverse de  $x$ . La condition est donc suffisante.  
 Montrons qu'elle est nécessaire. Soit  $x$  un élément inversible de  $A$ , alors il existe  $y$  tel que  $xy = 1$ . Mais comme  $N$  est un morphisme pour la multiplication,  $N(x)N(y) = 1$ . Or  $N(x)$  et  $N(y)$  sont des entiers. Les seuls éléments de  $\mathbb{Z}$  inversibles pour la multiplication sont 1 et  $-1$ . D'où le résultat.
5. Il suffit de calculer l'image par  $N$ , et d'appliquer le résultat de la question précédente.  $N(3 + 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$ . L'inverse de  $3 + 2\sqrt{3}$  est donc  $3 - 2\sqrt{2}$ .

## Problème

1. (a) On a d'abord  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , la matrice nulle commute avec  $F$ , donc  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , en plus  $\forall (M, N) \in \mathcal{C}^2$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(M + \lambda N)F = MF + \lambda NF = FM + \lambda FN = F(M + \lambda N),$$

d'où  $M + \lambda N \in \mathcal{C}$  et par suite,  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- (b) Tout calcul fait on a :

$$FM = \begin{pmatrix} ax - bz & ay - bt \\ bx + cz & by + ct \end{pmatrix}, \quad MF = \begin{pmatrix} ax + by & -bx + cy \\ az + bt & -bz + ct \end{pmatrix}$$

Donc

$$MF = FM \Leftrightarrow \begin{cases} ax - bz = ax + by \\ ay - bt = -bx + cy \\ bx + cz = az + bt \\ by + ct = -bz + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ b(x - t) = (c - a)y \end{cases}$$

- (c) Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$  alors

$$M = \begin{pmatrix} x - t + t & y \\ -y & t - x + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-a}{b}y + t & y \\ -y & -\frac{c-a}{b}y + x \end{pmatrix},$$

d'autre part

$$uI + vF = \begin{pmatrix} u + va & vb \\ -vb & u + vc \end{pmatrix}.$$

Donc pour avoir  $M = uI + vF$  il suffit de prendre  $v = -\frac{y}{b}$  et  $u = x + \frac{ay}{b}$

- (d) D'après la question précédente  $(I, F)$  est une famille génératrice de  $\mathcal{C}$ , elle est en plus libre, car  $I$  et  $F$  ne sont pas proportionnelles, donc  $(I, F)$  est une base de  $\mathcal{C}$ .
2. (a)  $F^2 \in \mathcal{C}$ , donc il existe des scalaires  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  tels que  $F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$ . D'autre part, on a :

$$F^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -ab - bc \\ ab + bc & -b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

D'où, par identification des coefficients,  $\alpha_2 = a + c$  et  $\beta_2 = -ac - b^2$ .

- (b) Puisque  $F^n \in \mathcal{C}$ , alors il existe des scalaires  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que  $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$ .

Cherchons la relation de récurrence liant les  $\alpha_n$ . L'égalité  $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$  entraîne :

$$F^{n+1} = F(\alpha_n F + \beta_n I) = \alpha_n F^2 + \beta_n F = \alpha_n(\alpha_2 F + \beta_2 I) + \beta_n F = (\alpha_n \alpha_2 + \beta_n)F + \alpha_n \beta_2 I.$$

Il suffit donc de prendre  $\alpha_{n+1} = \alpha_n \alpha_2 + \beta_n$  et  $\beta_{n+1} = \alpha_n \beta_2$ .

(c) D'après la question précédente, on a :

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}\alpha_2 + \beta_{n+1} = \alpha_{n+1}\alpha_2 + \alpha_n\beta_2,$$

c'est donc la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'équation caractéristique  $r^2 - \alpha_2 r - \beta_2 = 0$  et de discriminant  $\Delta = \alpha_2^2 + 4\beta_2 = (a+c)^2 - 4(ac+b^2)$ .

(d) Dans ce cas  $\Delta = 9$  et par suite  $\alpha_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$  où  $r_1 = 2$  et  $r_2 = -1$  solutions de l'équation caractéristique  $r^2 - r - 2 = 0$  et  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions initiales  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ . On trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^n).$$

(e) Dans ce cas  $\Delta = 0$  et par suite  $\alpha_n = (\lambda + \mu n)r^n$  où  $r = 2$  solution double de l'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 4 = 0$  et  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes qu'on peut trouver à l'aide des conditions initiales  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ . On trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = n2^{n-1}.$$

3. (a) Soit  $(M, N) \in \mathcal{C}^2$ , alors il existe des scalaires  $u, v, u', v'$  tels que  $M = uI + vF, N = u'I + v'F$ , d'où :

$$\begin{aligned} MN &= uu'I + (uv' + vu')F + vv'F^2 \\ &= uu'I + (uv' + vu')F + vv'(\alpha_2 F + \beta_2 I) \\ &= (uu' + vv'\beta_2)I + (uv' + vu' + vv'\alpha_2)F \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

ainsi  $\mathcal{C}$  est stable pour le produit matriciel.

(b) Soit  $M = uI + vF \in \mathcal{C}$ , alors  $M$  est inversible si, et seulement si,  $\det(M) = u^2 + (a+c)uv + (ac+b^2)v^2 \neq 0$ .

(c) Toutes les matrices sont inversibles si, et seulement si,

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, u^2 + (a+c)uv + (ac+b^2)v^2 \neq 0$$

si, et seulement si,

$$\left(u + \frac{a+c}{2}v\right)^2 + \left(ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4}\right)v^2 \neq 0$$

si, et seulement si,

$$ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4} > 0$$

si, et seulement si,

$$4b^2 - a^2 - c^2 + 2ac > 0$$

si, et seulement si,

$$4b^2 > (a-c)^2.$$

(d) Dans le cas où  $a = 3, b = -2, c = -2$  on a  $16 = 4b^2 < (a-c)^2 = 25$ , et avec les notations précédentes  $M = uI + vF$  est non inversible si, et seulement si,  $u$  et  $v$  solutions de l'équation :

$$\left(u + \frac{a+c}{2}v\right)^2 + \left(ac + b^2 - \frac{(a+c)^2}{4}\right)v^2 = 0$$

c'est à dire  $\left(u - \frac{1}{2}v\right)^2 - \frac{9}{4}v^2 = 0$  si, et seulement si,  $u - \frac{1}{2}v = -\frac{3}{2}v$  ou  $u - \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v$  si, et seulement si,  $u = -v$  ou  $u = 2v$ , donc toutes les matrices sont inversibles sauf celles de la forme  $u(I - F)$  ou  $v(2I + F)$ , c'est à dire non proportionnelles ni à  $I - F$  ni à  $2I + F$

4. (a) Il suffit de montrer que  $\Phi$  est injective si, et seulement si,  $F$  inversible. En effet si  $F$  inversible alors

$$M \in \ker \Phi \Leftrightarrow FM = 0$$

et donc  $F^{-1}FM = M = 0$ , d'où  $\Phi$  est injective.

Inversement, si  $\Phi$  est automorphisme, en particulier  $\Phi$  est surjective et donc il existe  $M \in \mathcal{C}$  tel que  $MF = I$ , donc  $F$  est inversible.

- (b)  $\Phi(I) = F$  et  $\Phi(F) = F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$ , d'où :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^2 - ac \\ 1 & a + c \end{pmatrix}.$$

•••••