Devoir surveillé $n^\circ 04$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Exercice I

1. Cas $a = c$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix},\ \exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

Cas $a \neq c$.

$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \alpha_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$, avec $\alpha_n = b(a^{n-1}c^0 + a^{n-2}c + \ldots + a^0c^{n-1}) = b\dfrac{a^n - c^n}{a - c}$ et $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & x \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ où

$$x = b\frac{e^a - e^c}{a - c}.$$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ de T. Si $\exp(A) = \exp(A')$ alors par identification des coefficients diagonaux, on obtient $a = a'$ et $c = c'$.
Dans le cas $a = c$, l'identification du coefficient d'indice $(1, 2)$ donne $be^a = b'e^{a'}$ d'où $b = b'$.
Dans le cas $a \neq c$, la même identification donne

$$b\frac{e^a - e^c}{a - c} = b'\frac{e^{a'} - e^{c'}}{a' - c'}$$

et à nouveau $b = b'$.
Ainsi, l'application $\exp : T \to T^+$ est injective.
Considérons maintenant $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in T^+$.
Si $\alpha = \gamma$ alors pour $a = \ln(\alpha)$ et $b = \dfrac{\beta}{\alpha}$, on obtient $A \in T$ vérifiant $\exp(A) = B$.
Si $\alpha \neq \gamma$ alors pour $a = \ln(\alpha)$, $c = \ln(\gamma)$ et $b = \beta\dfrac{a - c}{\alpha - \gamma}$, on obtient $A \in T$ vérifiant $\exp(A) = B$.
Ainsi, l'application $\exp : T \to T^+$ est surjective.

Exercice II

1. Si la suite de terme général $z_n = e^{ia\ln n}$ convergeait, alors il en serait de même de sa suite extraite de terme général $z_{2^k} = e^{ika\ln 2} = \left(e^{ia\ln 2}\right)^k$ (c'est une suite géométrique avec une raison de module 1), ce qui entraînerait $a\ln 2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, en considérant la suite extraite (z_{3^k}), on aurait $a\ln 3 \in 2\pi\mathbb{Z}$, et le rapport $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ serait rationnel (absurde : de $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q}$, on tirerait $3^p = 2^q$).

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $f'(t) = \dfrac{ia - 1}{t^2}e^{ia\ln t}$. Pour $t \in [k, k+1]$, on a $|f'(t)| \leq \dfrac{M}{k^2}$ avec $M = |ia - 1| = \sqrt{a^2 + 1}$, donc $|f(t) - f(k)| \leq \dfrac{M}{k^2}(t - k)$.

3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|v_k - u_k| = \left|\int_k^{k+1} f(t) - f(k)\right| \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} |f(t) - f(k)|\mathrm{d}t \leq \frac{M}{k^2}\int_k^{k+1}(t - k)\mathrm{d}t = \frac{M}{2k^2}.$$

(b) D'après l'inégalité de la question précédente, la série de terme général $v_k - u_k$ étant absolument convergente, on en déduit que les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} v_k$ sont de même nature. Or,

$$\int \frac{1}{t}e^{ia\ln t}\mathrm{d}t = \int e^{iau}\mathrm{d}u = \frac{1}{ia}e^{iau} = \frac{1}{ia}e^{ia\ln t},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{ia}\left(e^{ia\ln(n+1)} - 1\right).$$

Or, cette dernière expression n'a pas de limite quand n tend vers ∞ (d'après la première question). La série $\sum_{n\in\mathbb{N}*} v_n$ est donc divergente, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge aussi.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. On a obtenu $T_n = \frac{1}{ia}\left(e^{ia\ln(n+1)} - 1\right)$, donc $|T_n| \leq \frac{2}{|a|}$, donc les sommes partielles de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} v_k$ sont bornées. Comme $|S_n - T_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k - v_k| \leq \frac{M}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, les sommes partielles S_n sont aussi bornées.

4. Il suffit d'appliquer le résultat avec $u_n = \frac{1}{n}e^{ia\ln n}$ et $a_n = \frac{1}{\ln n}$ pour déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{ia\ln n}}{n\ln n}$. est convergente.

Problème

1. Une norme utile sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$

1. On sait que les applications

$$\left\{\begin{array}{c} \mathscr{M}_p(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_p(\mathbb{C})^n \\ A \mapsto (A, A, ..., A) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} \mathscr{M}_p(\mathbb{C})^n \to \mathscr{M}_p(\mathbb{C}) \\ (A_1, A_2, ..., A_n)) \mapsto A_1A_2...A_n \end{array}\right.$$

sont continues (la première est linéaire, la deuxième est n-linéaire et elles démarrent des espaces de dimensions finis). Donc par une récurrence et par composition, $A \mapsto A^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par somme de fonctions continues, $A \mapsto \sum_{i=0}^{n}\lambda_i A^i$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Par restriction à $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, f_P est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

2.
- Linéarité à droite : soient $A, B, C \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}({}^tA(\lambda B + \mu C)) & = & \mathrm{tr}(\lambda {}^tAB + \mu {}^tAC) \\ & = & \lambda\,\mathrm{tr}\,{}^tAB + \mu\,\mathrm{tr}\,{}^tAC \qquad \text{(linéarité de tr)} \end{array}$$

- Symétrie : $\mathrm{tr}({}^tBA) = \mathrm{tr}({}^t({}^t(BA)) = \mathrm{tr}({}^tAB)$ car $\mathrm{tr}\,{}^tM = \mathrm{tr}\,M$, ${}^t({}^tM) = M$ et ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$).
- La symétrie et la linéarité à droite impliquent la linéarité à gauche.
- Définie positif : en posant ${}^tAA = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$, on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ki}^2$. D'où $\mathrm{tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} a_{ki}^2$ qui est toujours positif. De plus, $\mathrm{tr}({}^tAA)$ est nul si, et seulement si, $a_{ki} = 0$ pour tout $(k, i) \in [\![1, p]\!]^2$, c'est-à-dire si, et seulement si, A est nulle.

3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, on a :

$$a_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_{kl}^2 = \|A\|^2,$$

d'où

$$|a_{ij}| \leq \|A\|.$$

4. Posons $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^p$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{p} b_{lj}^2\right).$$

Ainsi,

$$\sum_{i,j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kJ}\right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{p} b_{lj}^2\right) = \left(\sum_{i,k=1}^{p} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{l,j=1}^{p} b_{lj}^2\right).$$

D'où $\|AB\|^2\leq\|A\|^2\|B\|^2$ ou encore $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$.

5. D'après la question précédente, $\|A^2\|\leq\|A\|^2$ et par une récurrence sur $n\in\mathbb{N}$,

$$\|A^n\|=\|A^{n-1}A\|\leq\|A^{n-1}\|\|A\|\leq\|A\|^n.$$

2. Séries de matrices

1. D'autre part, pour tout $r\in]0,R[$ et pour tout $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\|<r$, on a $\|a_nA^n\|\leq|a_n|r^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|r^n$ converge. D'où :

$$\forall A\in\overline{B}(0,r),\quad \|R_n(A)\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kA^k\right\|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k.$$

Le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nA^n$ converge uniformément sur tout compact de la boule $\mathscr{B}$. De plus, les fonctions $A\mapsto a_nA^n$ étant continues, donc on peut conclure que l'application $A\mapsto\varphi(A)$ est continue sur $\mathscr{B}$.

2. (a) On considère la partie E de $\mathbb{N}$, définie par :

$$E=\left\{n\in\mathbb{N}^*\ \middle|\ (A^k)_{0\leq k\leq n-1}\text{ est libre}\right\}.$$

- E est non vide car contient 1, puisque $A^0=I_p$ est non nul, donc la famille (A^0) est libre.
- E est borné car $E\subset[\![1,p^2]\!]$, en effet, pour tout $n\geq p^2$, la famille $(A^k)_{0\leq k\leq p^2}$ est liée car contient $n\geq p^2+1$ éléments appartenant à un espace de dimension p^2.

Soit $r=\max E\in[\![1,p^2]\!]$. Alors $(A^k)_{0\leq k\leq r-1}$ est libre car $r\in E$ et $(A^k)_{0\leq k\leq r}$ est liée par maximalité de r.

(b) Soit $V=\mathrm{Vect}(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Montrons que $\mathscr{F}=(A^k)_{0\leq k\leq r-1}$ est une base de V.
Les éléments de $\mathscr{F}$ sont dans V. La famille $\mathscr{F}$ est libre d'après la question précédente. Montrons qu'elle est génératrice. Soit donc $V'=\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Il suffit pour cela de montrer que tous les A^n appartiennent à V' lorsque $n\geq r$.
Montrons d'abord que $A^r\in V'$. Puisque $(I_p,A^1,\dots,A^r)$ est liée, il existe $\lambda_0,\dots,\lambda_r\in\mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{r}\lambda_kA^k=0$. Par liberté de la famille $(I_p,A^1,\dots,A^{r-1})$, $\lambda_r\neq0$. D'où $A^r=-\frac{1}{\lambda_r}\sum_{k=0}^{r-1}\lambda_kA^k$ et donc appartient à V'. En particulier, $\mathrm{Vect}(I_p,A^1,\dots,A^r)=V'$.
Montrons ensuite que $A^n\in V'$ pour tout $n\geq r$ par récurrence sur n. C'est fait si $n=r$. Supposons que c'est vrai pour un entier $n\geq r$. Alors $A^{n+1}=AA^n$ et $A^n\in V'=\mathrm{Vect}(I_p,A^1,\dots,A^{r-1})$. Donc $A^{n+1}\in\mathrm{Vect}(A^1,\dots,A^r)\subset V'$. On a bien $V'=V$.

(c) Puisque $\mathscr{F}$ est une base de V, l'application

$$\begin{array}{rccl}\varrho: & V & \to & \mathbb{R}^+\\ & B & \mapsto & \varrho(B)=\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}|\alpha_k|\end{array}$$

où $B = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k A^k$ est bien définie et est une norme sur V.
Puisque V est de dimension finie, toutes les normes sur V sont équivalentes, en particulier ϱ et la restriction de $\|\cdot\|$ à V. D'où l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\varrho \leq C\|\cdot\|$.
En particulier, puisque $A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$, on a :

$$\sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C\|A^n\|.$$

(d) Soit $k \in [\![1, r-1]\!]$. On a

$$|a_n \lambda_{k,n}| \leq |a_n| \sum_{i=0}^{r-1} |\lambda_{i,n}| \leq C|a_n|\|A^n\| \leq C|a_n|\|A\|^n.$$

Or $|a_n|\|A\|^n$ est le terme général d'une série positive convergente car $\|A\| < R$. Ainsi la série de terme général $a_n\lambda_{k,n}$ converge absolument dans $\mathbb{C}$, donc converge.

(e) Puisque V est un espace vectoriel normé de dimension finie, il est fermé dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. D'après la question **2.2.2b**, $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ appartient à V pour tout n. Donc sa limite $\varphi(A)$ appartient aussi à V.

Puisque $\mathscr{F}$ est une base de V, il existe une unique famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}) \in \mathbb{C}^r$ telle que $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k A^k$. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ convient et est unique par unicité de la famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1})$.

(f) On sait que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Un calcul immédiat donne $A^2 = A$, et donc $A^n = A$ pour tout $n \geq 1$ par récurrence immédiate. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n &= I_p + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} A \\ &= I_p + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 \right) A \\ &= I_p + (e-1)A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-e & 1-e \\ e-1 & 1 & e-1 \\ 1-e & 1-e & 2e-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Montrons d'abord que φ coïncide avec une fonction polynomiale sur son domaine de définition si et seulement si a_n est nul à partir d'un certain rang. En particulier, φ est elle-même polynomiale et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
L'implication réciproque est évidente, pour cela il suffit de prendre $\varphi = P$.
Réciproquement, on suppose $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge sur un disque ouvert $D(0, R)$ où $R > 0$ et que $A \mapsto \varphi(A)$ est de la forme $A \mapsto P(A)$ pour un certain $P \in \mathbb{C}[X]$.
Soit $x \in \left[0, \frac{R}{\sqrt{p}}\right[$. (Avec la convention $\frac{R}{\sqrt{p}} = +\infty$ si $R = +\infty$.) Alors $\|xI_p\| = x\sqrt{p} < R$ car $\|I_p\| = \sqrt{p}$. Donc

$$P(x)I_p = P(xI_p) = \varphi(xI_p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n I_p = \varphi(x)I_p.$$

Ainsi, $\varphi(x) = P(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{R}{\sqrt{p}}\right[\subset [0, R[$. Par unicité, les coefficients de ϕ sont ceux de P, qui sont nuls à partir d'un certain rang. Donc ϕ est polynomiale.

3. Deux applications

A-Première application : une formule de trigonométrie matricielle

1. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries complexes absolument convergentes. Alors la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ converge absolument et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A_k B_{n-k}\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A_k\|\|B_{n-k}\|.$$

Mais d'après le résultat sur les séries de nombres complexes la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}\|A_k\|\|B_{n-k}\|\right)$ est convergente. Le théorème sur la comparaison des séries affirme que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}\|A_k B_{n-k}\|\right)$ converge ce qui est bien la convergence absolue de $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right)$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} B_n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right) = \sum_{0\leq i,j\leq N, i+j>N} A_i B_j$$

et donc

$$\left\|\left(\sum_{n=0}^{N} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} B_n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right)\right\| \leq \sum_{0\leq i,j\leq N, i+j>N} \|A_i\|.\|B_j\| = \alpha_n \quad (*)$$

où $\alpha_n = \left(\sum_{n=0}^{N}\|A_n\|\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\|B_n\|\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n}\|A_k\|.\|B_{n-k}\|\right)$.

D'après le théorème sur les séries de nombres complexes le dernier terme tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ et donc le terme à droite dans l'inégalité $(*)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Puisque les trois séries sont convergentes, alors

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right).$$

3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Puisque la série définissant l'exponentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, les séries de terme général $\frac{(iA)^n}{n!}$ et $\frac{(iB)^n}{n!}$ convergent absolument car $\left\|\frac{(iA)^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$ et $\frac{\|A\|^n}{n!}$ terme général d'une série absolument convergente.

En vertu du résultat précédent, la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{(iA)^k}{k!}\frac{(iB)^{n-k}}{(n-k)!}$ converge absolument et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(iA)^k}{k!}\frac{(iB)^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iA)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iB)^n}{n!}\right) = \exp(iA)\exp(iB).$$

D'autre part, si A et B commutent il est de même de iA et iB, en vertu de la formule du binôme,

$$(iA+iB)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(iA)^k(iB)^{n-k} = i^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(iA)^k(iB)^{n-k}$$

pour tout $N\in\mathbb{N}$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\frac{(iA)^k}{k!}\frac{(iB)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{N} i^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} = \sum_{n=0}^{N}\frac{i^n}{n!}(A+B)^n,$$

suite qui converge vers $\exp i(A+B)$ par définition de l'exponentielle de matrice. On a donc

$$\exp i(A+B) = \exp iA \exp iB$$

pour tout $(A,B)\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $AB=BA$.

4. D'après la règle de d'Alembert, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent pour tout $x\in\mathbb{R}$. D'après la question **2.2.2e**, $\cos(A)$ et $\sin(A)$ existent et sont des polynômes en A, donc commutent. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\cos^2(A)+\sin^2(A) &= (\cos(A)+i\sin(A))(\cos(A)-i\sin(A))\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i^{2n}}{(2n)!}A^{2n}+\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}A^{2n+1}\right]\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i^{2n}}{(2n)!}A^{2n}-\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}A^{2n+1}\right]\right)\\ &= (\exp iA)(\exp -iA) = \exp 0 = I_p.\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i^{2n}}{(2n)!}A^{2n}-\frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}A^{2n+1}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}(-iA)^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}(-iA)^{2n+1}\right]$.

B-Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

1. Le résultat est évident si $A=0$. On suppose donc $A\neq 0$. Soit $R>\frac{1}{\|A\|}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On note $z=Re^{i\theta}$. Donc $z\neq 0$. De plus, $\left\|\frac{1}{z}A\right\| = \frac{1}{R}\|A\|<1$. D'après le cours, $I_p-\frac{1}{z}A$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}A^n$. Donc $zI_p-A=z(I_p-\frac{1}{z}A)$ est inversible d'inverse $\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}A^n$. On a bien pour $R>\|A\|$:

$$(Re^{i\theta}I_p-A)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(Re^{i\theta})^{-n}A^n.$$

2. Soit $R>\|A\|$. Considérons pour tout $k\in\mathbb{N}$ la fonction

$$\begin{array}{cccc} u_k: & [0,2\pi] & \to & \mathscr{M}_p(\mathbb{C})\\ & \beta & \mapsto & \left(Re^{i\theta}\right)^{-k}A^k\end{array}$$

Les fonctions u_k sont continues par composition. La série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k$ converge normalement sur $[0,2\pi]$ car $\|u_k\|_\infty = R^{-k}\|A^k\|\leq\left(\frac{\|A\|}{R}\right)^k$, terme général d'une série géométrique convergente (car $\frac{\|A\|}{R}\in[0,1[$).
On en déduit la continuité sur $[0,2\pi]$ de

$$\theta\mapsto\left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n = \left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}.$$

En particulier, $\theta \mapsto \left(Re^{i\theta}\right)^n \left(Re^{i\theta}I_p - A\right)^{-1}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui justifie l'existence de l'intégrale. Par convergence normale sur un segment, on peut permuter les symboles $\displaystyle\int$ et $\sum$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-k}A^k\mathrm{d}\theta \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-k-1)\theta}\mathrm{d}\theta\right)R^{n-k-1}A^k.$$

Or $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-k-1)\theta}\mathrm{d}\theta = \delta_{k,n-1}$. Il ne reste donc que A^{n-1} dans la somme, d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\beta}\right)^n\left(Re^{i\beta}I_p - A\right)^{-1}\mathrm{d}\beta = A^{n-1}.$$

3. D'après les questions précédentes, pour $R > \|A\|$,

$$\begin{aligned}\chi_A(A) &= \sum_{p=0}^{d}a_pA^p = \sum_{p=0}^{d}a_p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^{p+1}(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})\left(\sum_{p=0}^{d}a_p(Re^{i\theta})^p\right)(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

4. Pour $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ inversible, on a ${}^tComM = (\det M)M^{-1}$. D'où pour $R > \|A\|$,

$$\chi_A(Re^{i\theta}) = (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = {}^tCom(Re^{i\theta}I_d - A).$$

D'après la question précédente, $\chi_A(A) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Re^{i\theta}\,{}^tCom(Re^{i\theta}I_d - A)\mathrm{d}\theta$. Puisque les coefficients de ${}^tComM$ sont des déterminants d'ordre $d-1$ extraits de M, et qu'ils sont donc polynomiaux en les coefficients de M, l'application $\theta \mapsto {}^tCom(Re^{i\theta}I_d - A)$ est polynomiale en $e^{i\theta}$. On écrit ${}^tCom(Re^{i\theta}I_d - A) = (\alpha_{i,j}(\theta))_{i,j}$, de sorte que

$$\chi_A(A)_{i,j} = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\alpha_{i,j}(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Puisque $e^{i\theta}\alpha_{i,j}(\theta) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\lambda_pe^{ip\theta}$ et que $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{ip\theta}\mathrm{d}\theta = 0$, on a bien $(\chi_A(A))_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, et donc $\chi_A(A) = 0$.

●●●●●●●●●●●