Devoir surveillé $n^\circ 03$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Partie I

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$. Pour $n = 0$, l'inégalité s'écrit $\|x_1 - x_0\| \leq k^0 \|x_1 - x_0\|$. Comme $k^0 = 1$, on a $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - x_0\|$, ce qui est trivialement vrai.
Supposons que pour un entier $n \geq 0$ fixé, on ait $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$. Montrons que c'est encore vrai pour $n+1$, c'est-à-dire que $\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq k^{n+1} \|x_1 - x_0\|$.
Par définition de la suite, on a $x_{n+2} = f(x_{n+1})$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. En utilisant le caractère k-contractant de f, on a :

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\|$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence ($\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$), on obtient :

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq k \cdot (k^n \|x_1 - x_0\|) = k^{n+1} \|x_1 - x_0\|$$

L'hérédité est donc vérifiée.
En conclusion, l'inégalité est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc par le principe de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

2. Soit $(r, s) \in \mathbf{N}^2$ tel que $r < s$. On utilise l'inégalité triangulaire en décomposant le terme $x_s - x_r$ par une somme télescopique :

$$\|x_s - x_r\| = \left\| \sum_{j=r}^{s-1} (x_{j+1} - x_j) \right\| \leq \sum_{j=r}^{s-1} \|x_{j+1} - x_j\|$$

D'après le résultat de la **Question 1**, on sait que pour tout j, $\|x_{j+1} - x_j\| \leq k^j \|x_1 - x_0\|$. En injectant cette inégalité, on obtient :

$$\|x_s - x_r\| \leq \left(\sum_{j=r}^{s-1} k^j \right) \|x_1 - x_0\|$$

La somme entre parenthèses est une somme partielle d'une suite géométrique de raison $k \in]0, 1[$. On factorise par k^r :

$$\sum_{j=r}^{s-1} k^j = k^r \sum_{i=0}^{s-r-1} k^i = k^r \frac{1 - k^{s-r}}{1 - k}$$

Comme $0 < k < 1$ et $s - r > 0$, on a $0 < 1 - k^{s-r} < 1$. Par conséquent :

$$\frac{1 - k^{s-r}}{1 - k} < \frac{1}{1 - k}$$

On en déduit finalement la majoration recherchée :

$$\|x_s - x_r\| \leq \frac{k^r}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

3. D'après la question précédente, pour tous entiers $s > r$, on a :

$$\|x_s - x_r\| \leq \frac{k^r}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

Comme $0 < k < 1$, alors $\lim_{r \to +\infty} k^r = 0$. On en déduit que :

$$\lim_{r,s \to +\infty} \|x_s - x_r\| = 0$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace E. Or, par hypothèse, E est un espace complet. Toute suite de Cauchy dans E est convergente. Il existe donc $l \in E$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l$$

Enfin, comme tous les termes de la suite (x_n) appartiennent à A et que A est une partie fermée de E, la limite l appartient également à A. La suite (x_n) est donc convergente dans A.

4. **Existence :** Soit $l \in A$ la limite de la suite (x_n) établie à la question 3. Comme f est k-contractante, elle est lipschitzienne, donc continue sur A. En passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient par continuité :

$$l = f(l)$$

Le point l est donc un point fixe de f.
Unicité : Supposons qu'il existe $l_1, l_2 \in A$ tels que $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$. Par la propriété de contraction :

$$\|l_1 - l_2\| = \|f(l_1) - f(l_2)\| \leq k\|l_1 - l_2\|$$

D'où :

$$(1-k)\|l_1 - l_2\| \leq 0$$

Comme $1 - k > 0$ (car $k < 1$), on a nécessairement $\|l_1 - l_2\| = 0$, soit $l_1 = l_2$.

5. L'erreur commise est représentée par la distance $\|l - x_r\|$. D'après le résultat de la **Question 2**, nous avons pour tout entier $s > r$:

$$\|x_s - x_r\| \leq \frac{k^r}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

Puisque E est complet et A fermé, la suite $(x_s)_{s\in\mathbf{N}}$ converge vers l quand s tend vers l'infini. En utilisant la continuité de la norme, nous pouvons passer à la limite dans l'inégalité précédente lorsque $s \to +\infty$:

$$\lim_{s \to +\infty} \|x_s - x_r\| \leq \frac{k^r}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

On en déduit la majoration de l'erreur suivante :

$$\|l - x_r\| \leq \frac{k^r}{1-k}\|x_1 - x_0\|.$$

6. Considérons la fonction $f : x \mapsto 1 + \sqrt{x}$ sur l'intervalle $A = [1, 4]$.

- ◇ A est une partie fermée de $\mathbf{R}$, et $\mathbf{R}$ est complet.
- ◇ f est croissante et $f([1, 4]) = [2, 3] \subset [1, 4]$. L'application est bien de A dans A.
- ◇ f est dérivable sur $]1, 4[$ avec $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Sur l'intervalle $[1, 4]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis, f est $\dfrac{1}{2}$-contractante.

D'après le théorème du point fixe (Question 4), la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique $l \in [1, 4]$ tel que $f(l) = l$.

$$l = 1 + \sqrt{l} \iff (l - 1) = \sqrt{l} \implies l^2 - 2l + 1 = l \iff l^2 - 3l + 1 = 0$$

Les racines du polynôme sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $l > 1$, on en déduit :

$$l = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

7. Montrons que f vérifie les conditions des questions précédentes :

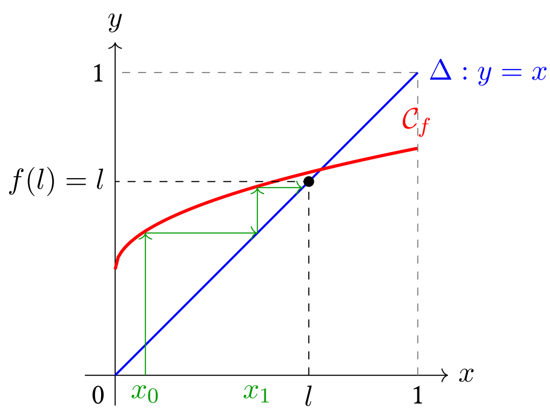
- L'espace $E = \mathbf{R}$ muni de la valeur absolue est un espace vectoriel normé **complet**.
- La partie $A = [0,1]$ est un intervalle fermé de $\mathbf{R}$, donc A est une **partie fermée**.
- Par hypothèse, f est une application de A dans elle-même.
- Comme f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ avec $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]0,1[$, l'inégalité des accroissements finis assure que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

Puisque $0 < k < 1$, f est k-contractante.

D'après le résultat de la **Question 4**, toutes les conditions sont vérifiées pour affirmer que f admet un point fixe et un seul dans $[0,1]$.

8. **Interprétation :** Sur le plan muni d'un repère orthonormé, le point fixe l est l'abscisse du point d'intersection unique entre la courbe représentative de f (notée $\mathcal{C}_f$) et la première bissectrice d'équation $\Delta : y = x$. La condition $|f'(x)| < 1$ assure que la courbe traverse la droite Δ sans pouvoir être parallèle à celle-ci, garantissant l'unicité.



9. On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.
Existence : φ est continue sur $[0,1]$. Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, on a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. On en déduit :

$$\varphi(0) = f(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe au moins un réel $l \in [0,1]$ tel que $\varphi(l) = 0$, c'est-à-dire $f(l) = l$.
Unicité : φ est dérivable sur $]0,1[$ et $\varphi'(x) = f'(x) - 1$. Or, par hypothèse, $|f'(x)| \leq k < 1$, donc $f'(x) \leq k$. Ainsi, $\varphi'(x) \leq k - 1$. Comme $k < 1$, alors $\varphi'(x) < 0$. La fonction φ est donc **strictement décroissante** sur $[0,1]$. Elle s'annule donc au plus une seule fois sur cet intervalle.
L'existence et l'unicité du point fixe l sont ainsi démontrées par une méthode d'analyse réelle sans passer par le théorème du pont fixe.

Partie II

1. **Relation entre $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$:** On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'intervalle $[0,a]$ pour les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto |f(t)|$:

$$\|f\|_1 = \int_0^a 1 \cdot |f(t)| \mathrm{d}t \leq \left(\int_0^a 1^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2} \left(\int_0^a |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

D'où :

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{a} \|f\|_2$$

On pose ainsi $M = \sqrt{a}$.

Relation entre $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$: Pour tout $t \in [0,a]$, on a $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$, donc $|f(t)|^2 \leq \|f\|_\infty^2$. En intégrant sur $[0,a]$:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^a |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^a \|f\|_\infty^2 \mathrm{d}t = a\|f\|_\infty^2$$

En prenant la racine carrée, on obtient $\|f\|_2 \leq \sqrt{a}\|f\|_\infty$. En multipliant par $M = \sqrt{a}$, il vient :

$$M\|f\|_2 \leq \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}\|f\|_\infty = a\|f\|_\infty$$

On pose ainsi $M' = a$.
On a bien l'existence de $M = \sqrt{a}$ et $M' = a$ satisfaisant la double inégalité.

2. Soient $f, g \in E_a$. Pour tout $x \in [0,a]$, on a :

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \left| \int_0^x t(f^2(t) - g^2(t))\mathrm{d}t \right|$$

En utilisant l'identité $f^2(t) - g^2(t) = (f(t) - g(t))(f(t) + g(t))$, il vient :

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \int_0^x t|f(t) - g(t)| \cdot |f(t) + g(t)|\mathrm{d}t$$

On majore les termes sous l'intégrale par leurs normes respectives :

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \|f - g\|_\infty(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) \int_0^x t\mathrm{d}t$$

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \frac{x^2}{2}(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\|f - g\|_\infty$$

En passant la borne supérieure sur l'intervalle $[0,a]$:

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{a^2}{2}(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\|f - g\|_\infty$$

Soit maintenant $f_0 \in E_a$ une fonction fixée. Montrons que T est continue en f_0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. D'après la majoration établie précédemment :

$$\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \leq \frac{a^2}{2}(\|f\|_\infty + \|f_0\|_\infty)\|f - f_0\|_\infty$$

Si on choisit f dans la boule unité centrée en f_0, soit $f \in B(f_0, 1)$, on a $\|f\|_\infty \leq \|f_0\|_\infty + 1$. L'inégalité devient :

$$\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \leq \left[\frac{a^2}{2}(2\|f_0\|_\infty + 1)\right] \|f - f_0\|_\infty$$

En posant $K = \dfrac{a^2}{2}(2\|f_0\|_\infty + 1)$, on a une relation de Lipschitz locale :

$$\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \leq K\|f - f_0\|_\infty$$

Lorsque $\|f - f_0\|_\infty \to 0$, alors $\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \to 0$. L'application T est donc continue en tout point f_0, et par suite, **continue sur E_a^∞**.

3. Soient $f, g \in E_a$. Pour tout $x \in [0,a]$:

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \int_0^x t|f(t) + g(t)| \cdot |f(t) - g(t)|\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $t \mapsto t|f(t) + g(t)|$ et $t \mapsto |f(t) - g(t)|$:

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \sqrt{\int_0^x t^2(f(t) + g(t))^2\mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_0^x (f(t) - g(t))^2\mathrm{d}t}$$

En majorant t^2 par a^2 et en étendant l'intervalle d'intégration à $[0, a]$:

$$\sqrt{\int_0^x t^2(f(t)+g(t))^2 \mathrm{d}t} \leq a\|f+g\|_2 \leq a(\|f\|_2 + \|g\|_2)$$

$$\sqrt{\int_0^x (f(t)-g(t))^2 \mathrm{d}t} \leq \|f-g\|_2$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, a]$:

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq a(\|f\|_2 + \|g\|_2)\|f-g\|_2$$

En passant au supremum sur x, on obtient :

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq a(\|f\|_2 + \|g\|_2)\|f-g\|_2$$

Cette inégalité montre que T est localement lipschitzienne de E_a^2 vers E_a^∞. Par conséquent, T **est continue** de E_a^2 dans E_a^∞.
Soit maintenant $f_0 \in E_a$ une fonction fixée. Montrons que T est continue en f_0 de E_a^2 vers E_a^∞. D'après la majoration établie précédemment :

$$\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \leq a(\|f\|_2 + \|f_0\|_2)\|f-f_0\|_2$$

Considérons $f \in B(f_0, 1)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, soit $\|f - f_0\|_2 \leq 1$. On a alors $\|f\|_2 \leq \|f_0\|_2 + 1$. L'inégalité devient :

$$\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \leq [a(2\|f_0\|_2 + 1)]\,\|f-f_0\|_2$$

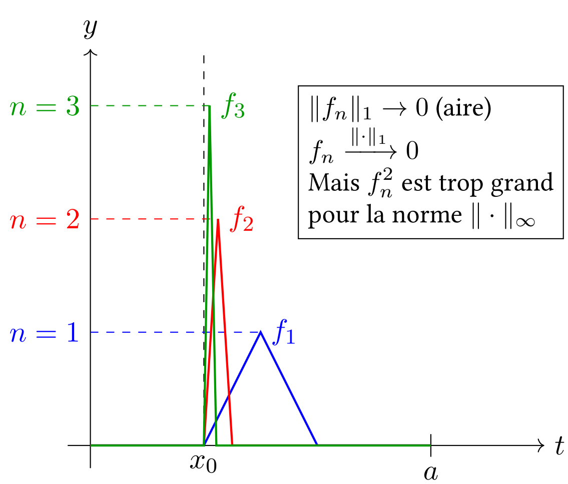
En posant $K = a(2\|f_0\|_2 + 1)$, on obtient une condition de Lipschitz locale :

$$\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \leq K\|f-f_0\|_2$$

Par passage à la limite, quand $\|f - f_0\|_2 \to 0$, alors $\|T(f) - T(f_0)\|_\infty \to 0$. L'application T est donc continue en tout point f_0, ce qui prouve la **continuité de T de E_a^2 vers E_a^∞**.

4. Montrons par un contre-exemple que T n'est pas continue. Soit $x_0 \in]0, a[$. On considère une suite de fonctions continues (f_n) définies de la façon suivante :

$$f_n \text{ est nulle en dehors de } [x_0, x_0 + \frac{1}{n^2}] \text{ et son graphe forme un triangle de hauteur } n.$$



◇ L'aire sous la courbe de $|f_n|$ est $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{2n}$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$. La suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$.
◇ Calculons la valeur de $T(f_n) - T(0)$ au point a. On a $T(0)(x) = x$, donc :

$$T(f_n)(a) - T(0)(a) = \int_0^a t f_n^2(t) \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{n^2}} t f_n^2(t) \mathrm{d}t$$

Par le théorème de la moyenne, comme $t \geq x_0$ sur l'intervalle d'intégration :

$$\int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n^2}} t f_n^2(t)\mathrm{d}t \geq x_0 \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n^2}} f_n^2(t)\mathrm{d}t$$

Les calculs montrent que, $\|f_n\|_2^2 = \int_0^a f_n^2(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n^2}} f_n^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$ [1]. D'où $T(f_n)(a) - T(0)(a) \geq \frac{x_0}{3}$.

En conclusion, bien que $\|f_n - 0\|_1 \to 0$, la différence $\|T(f_n) - T(0)\|_\infty$ ne tend pas vers 0 (elle est minorée par $\frac{x_0}{3}$). L'application T **n'est donc pas continue** de E_a^1 vers E_a^∞.

5. Soit $m > 0$. On pose $E_{a,m} = \{f \in E_a \mid \|f\|_\infty \leq m\}$. Montrons que $E_{a,m}$ est fermée et trouvons une condition sur a (notée a_m) pour que $T(E_{a,m}) \subset E_{a,m}$ et que T soit contractante.

(a) $E_{a,m}$ est la **boule fermée** de centre 0 et de rayon m dans l'espace de Banach $(E_a, \|\cdot\|_\infty)$. C'est donc une partie fermée.

(b) Soit $f \in E_{a,m}$. Pour tout $x \in [0, a]$:

$$|T(f)(x)| \leq \int_0^x t|f(t)|^2\mathrm{d}t + x \leq m^2\frac{x^2}{2} + x \leq \frac{m^2a^2}{2} + a$$

La condition $T(E_{a,m}) \subset E_{a,m}$ impose $\frac{m^2a^2}{2} + a \leq m$.

(c) D'après la question 2, pour $f, g \in E_{a,m}$:

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{a^2}{2}(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\|f - g\|_\infty \leq ma^2\|f - g\|_\infty$$

Donc T est contractante si $ma^2 < 1$.

En conclusion, pour que $T(E_{a,m}) \subset E_{a,m}$ et que T soit contractante, il faut que les deux conditions soient satisfaites :

- $\frac{m^2}{2}a^2 + a - m \leq 0$ (Stabilité)
- $ma^2 < 1$ (Contraction)

Le trinôme $P(a) = \frac{m^2}{2}a^2 + a - m$ possède une unique racine réelle positive $a_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2m^3}}{m^2}$ (l'autre est négative). Pour que le théorème du point fixe s'applique, a doit satisfaire simultanément :

$$a \leq \frac{\sqrt{1 + 2m^3} - 1}{m^2} \quad \text{(Stabilité)} \quad \text{et} \quad a < \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \text{(Contraction)}$$

1. **Calcul de la norme $\|f_n\|_2$:** L'expression de la fonction f_n, qui est définie sur $[0, a]$, est donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3(x - x_0) & \text{si } x \in \left[x_0, x_0 + \frac{1}{2n^2}\right] \\ -2n^3\left(x - x_0 - \frac{1}{n^2}\right) & \text{si } x \in \left[x_0 + \frac{1}{2n^2}, x_0 + \frac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition, $\|f_n\|_2^2 = \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n^2}} |f_n(x)|^2\mathrm{d}x$. Par symétrie du triangle par rapport à son sommet, on peut écrire :

$$\|f_n\|_2^2 = 2\int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{2n^2}} \left[2n^3(x - x_0)\right]^2 \mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable $u = x - x_0$, d'où $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Les bornes deviennent 0 et $\frac{1}{2n^2}$:

$$\|f_n\|_2^2 = 2\int_0^{\frac{1}{2n^2}} (2n^3u)^2\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{1}{2n^2}} 4n^6u^2\mathrm{d}u = 8n^6\int_0^{\frac{1}{2n^2}} u^2\mathrm{d}u = 8n^6\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Le résultat est indépendant de x_0 et de n.

On définit donc explicitement a_m par :

$$a_m = \min\left(\frac{\sqrt{1+2m^3}-1}{m^2}\,,\,\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

6. Cherchons m pour que a_m soit le plus grand possible. La borne a_m est définie par $a_m = \min(\phi(m), \psi(m))$ avec :

$$\phi(m) = \frac{\sqrt{1+2m^3}-1}{m^2} \quad \text{et} \quad \psi(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Pour la fonction $\phi(m) = \dfrac{\sqrt{2m^3+1}-1}{m^2}$, la dérivée est :

$$\phi'(m) = \frac{-m^3 + 2\sqrt{2m^3+1} - 2}{m^3\sqrt{2m^3+1}}$$

Donc :

$$\phi'(m) = 0 \Leftrightarrow -m^3 - 2 + 2\sqrt{2m^3+1} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2m^3+1} = m^3 + 2$$

En élevant au carré (les deux membres étant positifs pour $m > 0$) :

$$\begin{aligned} 4(2m^3+1) &= (m^3+2)^2 \\ 8m^3 + 4 &= (m^3)^2 + 4m^3 + 4 \\ (m^3)^2 - 4m^3 &= 0 \\ m^3(m^3-4) &= 0 \end{aligned}$$

Comme $m \in \mathbf{R}^{+*}$, on a $m^3 \neq 0$. La seule solution est donc :

$$m^3 - 4 = 0 \implies m^3 = 4 \implies m = \sqrt[3]{4} = 2^{2/3}$$

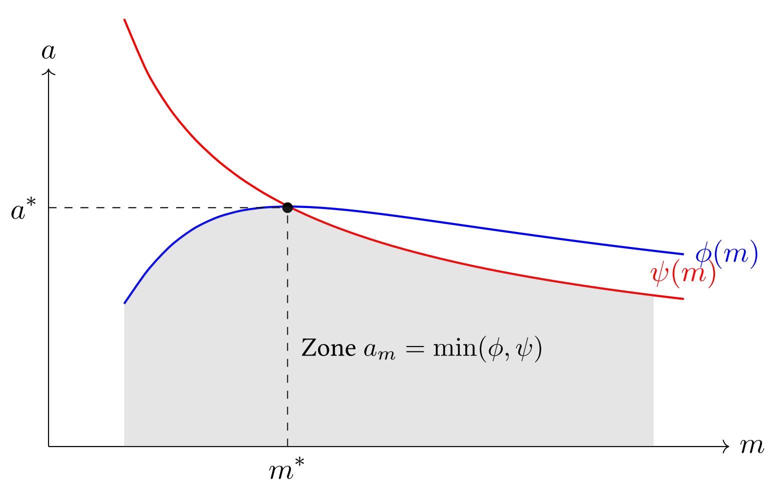
- ◇ La fonction ϕ (condition de stabilité) est croissante sur $]0, 4^{1/3}]$ et atteint son maximum en $m = 4^{1/3}$.
- ◇ La fonction ψ (condition de contraction) est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- ◇ L'égalité $\phi(m) = \psi(m)$ conduit à $m^3 = 4$, soit $m = 4^{1/3}$.

Pour $m < 4^{1/3}$, a_m est limité par la stabilité et croît avec m. Pour $m > 4^{1/3}$, a_m est limité par la contraction et décroît. Le maximum est donc atteint pour :

$$m = 4^{1/3} = 2^{2/3}$$

La valeur maximale de la borne est alors :

$$a_{max} = \frac{1}{\sqrt{4^{1/3}}} = \frac{1}{4^{1/6}} = \frac{1}{2^{1/3}} = 2^{-1/3}$$



7. Soit le problème de Cauchy $y' = xy^2 + 1$ avec $y(0) = 0$. En intégrant entre 0 et x, ce problème est équivalent à :

$$y(x) = \int_0^x (ty^2(t) + 1)\mathrm{d}t = \int_0^x ty^2(t)\mathrm{d}t + x$$

On retrouve l'opérateur T défini par $T(y)(x) = \displaystyle\int_0^x ty^2(t)\mathrm{d}t + x$.

À la question II.6, nous avons montré que la borne a_m est maximale pour $m = 4^{1/3} = 2^{2/3}$. La valeur de cette borne est alors $a_{max} = 2^{-1/3}$. Pour ces valeurs de a et m :

- $E_{a,m}$ est complet.
- T applique $E_{a,m}$ dans lui-même.
- T est contractante sur $E_{a,m}$.

Donc d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe une unique fonction $y_0 \in E_{a,m}$ telle que $T(y_0) = y_0$. Cette fonction est donc l'unique solution de l'équation différentielle sur $[0, 2^{-1/3}]$ vérifiant $y_0(0) = 0$ et $\|y_0\|_\infty \leq 2^{2/3}$.

8. La fonction y_1 vérifie $y_1'(x) = xy_1^2(x) + 1$. Pour $x > 0$, $y_1'(x) \geq 1$, donc y_1 est strictement croissante et $y_1(x) > y_1(0) = 0$. On peut donc diviser par $y_1^2(x)$:

$$\frac{y_1'(x)}{y_1^2(x)} = x + \frac{1}{y_1^2(x)}$$

Ou encore :

$$\frac{1}{y_1^2(x)} = \frac{y_1'(x)}{y_1^2(x)} - x$$

En intégrant cette égalité entre a et b ($0 < a < b$) :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)} &= \int_a^b \left(\frac{y_1'(x)}{y_1^2(x)} - x\right)\mathrm{d}x && (1)\\
&= \left[-\frac{1}{y_1(x)} - \frac{x^2}{2}\right]_a^b && (2)\\
&= \left(-\frac{1}{y_1(b)} - \frac{b^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{y_1(a)} - \frac{a^2}{2}\right) && (3)\\
&= \left(\frac{1}{y_1(a)} + \frac{a^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{y_1(b)} + \frac{b^2}{2}\right). && (4)
\end{aligned}$$

On obtient finalement l'identité demandée :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)} = \left[\frac{1}{y_1(x)} + \frac{x^2}{2}\right]_b^a$$

9. Supposons par l'absurde que y_1 soit définie sur $[0, +\infty[$. D'après la question 8, pour tout $b > a > 0$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)} = \frac{1}{y_1(a)} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{y_1(b)} - \frac{b^2}{2}$$

Puisque le membre de gauche est l'intégrale d'une fonction strictement positive sur $[a, b]$, on a :

$$\frac{1}{y_1(a)} + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{y_1(b)} - \frac{b^2}{2} > 0$$

D'où, en isolant les termes en b :

$$\frac{1}{y_1(b)} + \frac{b^2}{2} < \frac{1}{y_1(a)} + \frac{a^2}{2}$$

Comme $\dfrac{1}{y_1(b)} > 0$ pour tout $b > 0$, cette inégalité implique :

$$\frac{b^2}{2} < \frac{1}{y_1(a)} + \frac{a^2}{2}$$

Si l'on fixe a (par exemple $a = 1$) et que l'on fait tendre b vers $+\infty$, le terme $\dfrac{b^2}{2}$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait qu'il soit majoré par une constante fixe. L'application y_1 ne peut donc pas être définie sur $[0, +\infty[$.

Partie III

1. $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de dimension finie, il est donc complet. Soient $x, x' \in \mathbf{R}^n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la i-ème composante de $f(x) - f(x')$ est :

$$|(f(x) - f(x'))_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x'_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j - x'_j|$$

Comme $|x_j - x'_j| \leq \|x - x'\|_\infty$ pour tout j, on a :

$$|(f(x) - f(x'))_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x - x'\|_\infty$$

Soit $k = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Par hypothèse, $k < 1$. En passant à la borne supérieure sur les i :

$$\|f(x) - f(x')\|_\infty \leq k \|x - x'\|_\infty$$

L'application f est k-contractante avec $k < 1$. D'après le théorème du point fixe (Partie I, Q4), f admet un unique point fixe [2] dans $\mathbf{R}^n$.

2. Soient $x, x' \in \mathbf{R}^n$. Posons $h = x - x'$.

$$\|f(x) - f(x')\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(f(h))_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j \right|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|f(x) - f(x')\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |h_j|$$

En permutant les symboles de sommation :

$$\|f(x) - f(x')\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |h_j| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Soit $k = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Par hypothèse, $k < 1$. Il vient alors :

$$\|f(x) - f(x')\|_1 \leq k \sum_{j=1}^{n} |h_j| = k \|x - x'\|_1$$

L'application f est k-contractante pour la norme $\|\cdot\|_1$, elle admet donc un unique point fixe.

2. Note : S'agissant d'une application linéaire, le seul point fixe possible est le vecteur nul. L'existence est donc triviale, l'intérêt de la question réside surtout dans la démonstration de la contraction.

3. Considérons la matrice $M = A^\top A$. Calculons sa transposée :

$$(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$$

La matrice $A^\top A$ est donc une **matrice symétrique réelle**. D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
Soit λ une valeur propre de $A^\top A$ et X un vecteur propre associé non nul ($X \neq 0$). Par définition, $A^\top AX = \lambda X$. En multipliant à gauche par $X^\top$, on obtient :

$$X^\top A^\top AX = \lambda X^\top X$$

Cette égalité qui s'écrit aussi, à l'aide la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$, :

$$\|AX\|_2^2 = \lambda \|X\|_2^2$$

Puisque $X \neq 0$, alors $\|X\|_2^2 > 0$. On en déduit :

$$\lambda = \frac{\|AX\|_2^2}{\|X\|_2^2}$$

Comme le carré d'une norme est toujours positif ou nul, on conclut que $\lambda \geq 0$.

4. Considérons $\mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$[3]. Soit λ_{max} la plus grande valeur propre de la matrice symétrique $A^\top A$. D'après la question 3, $0 \leq \lambda_i < 1$ pour toutes les valeurs propres, donc $0 \leq \lambda_{max} < 1$.
La norme subordonnée de la matrice A associée à la norme euclidienne est $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$. Pour $k = \sqrt{\lambda_{max}}$, on a $k < 1$ et pour tout $x, x' \in \mathbf{R}^n$:

$$\|f(x) - f(x')\|_2 = \|A(x - x')\|_2 \leq \|A\|_2 \|x - x'\|_2 = k\|x - x'\|_2$$

L'application f est k-contractante dans l'espace complet $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_2)$. En vertu du théorème du point fixe (Partie I, Q4), f admet un unique point fixe.

3.

Lien entre $\|A\|_2$ et les valeurs propres de $A^\top A$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$. La norme subordonnée de A est définie par :

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

(a) **Expression du carré de la norme :**
Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, le carré de la norme de l'image est :

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^\top (Ax) = x^\top (A^\top A)x$$

(b) **Réduction de la matrice symétrique :**
D'après la question III.3, $M = A^\top A$ est une matrice symétrique réelle. Il existe donc une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ composée de vecteurs propres de M associés aux valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

(c) **Encadrement :**
Tout vecteur x se décompose dans cette base : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i e_i$, avec $\|x\|_2^2 = \sum c_i^2$. Alors :

$$x^\top (A^\top A)x = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n c_i^2 = \lambda_n \|x\|_2^2$$

On en déduit que pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_n$.

(d) **Conclusion :**
L'égalité est atteinte pour $x = e_n$ (vecteur propre associé à la plus grande valeur propre). Ainsi :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\rho(A^\top A)}$$

Partie IV

1. Soit $y \in E$. Chercher un point fixe de f_y revient à résoudre l'équation :

$$f_y(x) = x \iff y + u(x) = x \iff x - u(x) = y$$

Ce qui s'écrit de manière équivalente avec l'opérateur identité :

$$(\mathrm{Id}_E - u)(x) = y$$

- **Condition nécessaire ($\Longrightarrow$) :**
Si $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible, alors pour tout $y \in E$, l'équation $(\mathrm{Id}_E - u)(x) = y$ admet une solution unique donnée par $x = (\mathrm{Id}_E - u)^{-1}(y)$. Ainsi, f_y possède un unique point fixe.
- **Condition suffisante ($\Longleftarrow$) :**
Si pour tout $y \in E$, f_y admet un point fixe unique, alors pour tout élément y de l'espace d'arrivée, il existe un unique antécédent x par l'application $(\mathrm{Id}_E - u)$. L'endomorphisme $(\mathrm{Id}_E - u)$ est donc bijectif, ce qui prouve qu'il est inversible.

2. Soient $x, x' \in E$. Par définition de f_y :

$$\|f_y(x) - f_y(x')\| = \|(y + u(x)) - (y + u(x'))\| = \|u(x - x')\|$$

Par définition de la norme subordonnée $\|\!|.\|\!|$, on a pour tout vecteur $h \in E$:

$$\|u(h)\| \leq \|\!|u\|\!| \cdot \|h\|$$

D'où :

$$\|f_y(x) - f_y(x')\| \leq \|\!|u\|\!| \cdot \|x - x'\|$$

Puisque par hypothèse $\|\!|u\|\!| < 1$, l'application f_y est $\|\!|u\|\!|$-contractante.

Conclusion : L'espace E étant de dimension finie, il est complet. L'application f_y étant contractante sur un espace complet, elle admet, d'après la Partie I, un unique point fixe pour tout $y \in E$. En vertu de la question IV.1, l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E - u$ est donc **inversible**.

3. Soit $y \in E$ et la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = y + u(x_n)$. Montrons par récurrence que $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y)$:

- Pour $n = 1$, $x_1 = y + u(0) = y = u^0(y)$, la propriété est vraie.
- Supposons $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y)$. Alors $x_{n+1} = y + u\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y)\right) = y + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(y)$.

D'après le théorème du point fixe, la suite (x_n) converge vers l'unique point fixe l de f_y. Or, nous avons établi à la question IV.1 que ce point fixe est $l = (\mathrm{Id}_E - u)^{-1}(y)$. Par passage à la limite :

$$(\mathrm{Id}_E - u)^{-1}(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u^k(y)$$

Comme cette relation est vérifiée pour tout $y \in E$, on en déduit l'égalité dans l'espace des endomorphismes $\mathscr{L}(E)$:

$$(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u^k = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

●●●●●●●●●●