

Devoir libre n°10
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



1. Puisque les matrices $M(x)$ et $M(y)$ commutent (c'est-à-dire que $M(x)M(y) = M(y)M(x) = M(x+y)$), alors on peut affirmer qu'elles ont les mêmes vecteurs propres.
2. On pose $M(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \gamma(x) \\ \beta(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$ et $M(y) = \begin{pmatrix} \alpha(y) & \gamma(y) \\ \beta(y) & \delta(y) \end{pmatrix}$. On a :

$$M(x)M(y) = \begin{pmatrix} \alpha(x)\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) & \alpha(x)\gamma(y) + \gamma(x)\delta(y) \\ \beta(x)\alpha(y) + \delta(x)\beta(y) & \beta(x)\gamma(y) + \delta(x)\delta(y) \end{pmatrix}$$

et

$$M(y)M(x) = \begin{pmatrix} \alpha(y)\alpha(x) + \gamma(y)\beta(x) & \alpha(y)\gamma(x) + \gamma(y)\delta(x) \\ \beta(y)\alpha(x) + \delta(y)\beta(x) & \beta(y)\gamma(x) + \delta(y)\delta(x) \end{pmatrix}$$

Comme l'énoncé précise que $M(x)M(y) = M(x+y)$, on en déduit que ces deux produits sont égaux ($M(x)M(y) = M(y)M(x)$).

Cela implique, par exemple, pour le premier coefficient d'indice (1, 1) et le deuxième coefficient d'indice (1, 2) :

$$\begin{aligned} \alpha(x)\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) &= \alpha(y)\alpha(x) + \gamma(y)\beta(x) \\ \alpha(x)\gamma(y) + \gamma(x)\delta(y) &= \alpha(x)\gamma(y) + \gamma(x)\delta(y) \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en $\gamma(x)\beta(y) = \gamma(y)\beta(x)$ et $\frac{\alpha(x) - \delta(x)}{\gamma(x)}$ est constant, donc il existe un rapport constant entre γ et β .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \frac{\gamma(y)}{\beta(y)} = \frac{q}{r}$$

On peut donc écrire les coefficients sous la forme suivante en faisant apparaître deux fonctions $A(x)$ et $B(x)$:

- $\gamma(x) = qB(x)$
- $\beta(x) = rB(x)$
- $\alpha(x) - \delta(x) = -2pB(x)$ (par convention de notation du problème)

En posant $A(x) = \frac{\alpha(x) + \delta(x)}{2}$ (la demi-trace), on résout le système :

$$\begin{cases} \alpha(x) + \delta(x) = 2A(x) \\ \alpha(x) - \delta(x) = -2pB(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(x) = A(x) - pB(x) \\ \delta(x) = A(x) + pB(x) \end{cases}$$

On retrouve bien la forme demandée dans l'énoncé :

$$M(x) = \begin{pmatrix} A(x) - pB(x) & qB(x) \\ rB(x) & A(x) + pB(x) \end{pmatrix}$$

où p, q, r sont des constantes indépendantes de x , et A, B sont deux fonctions réelles de la variable réelle.

3. (a) 1. D'après la relation $M(x)M(y) = M(x + y)$, en effectuant le produit matriciel des formes établies à la question 2 :

— Le coefficient (1, 2) donne :

$$A(x)qB(y) - pB(x)qB(y) + qB(x)A(y) + qB(x)pB(y) = qB(x + y)$$

Après simplification par $q \neq 0$:

$$B(x + y) = A(x)B(y) + A(y)B(x)$$

— La trace (1, 1) + (2, 2) donne :

$$2A(x)A(y) + 2(p^2 + qr)B(x)B(y) = 2A(x + y)$$

En posant $\omega^2 = p^2 + qr$, on obtient :

$$A(x + y) = A(x)A(y) + \omega^2 B(x)B(y)$$

- (b) On pose $C(x) = A(x) + \omega B(x)$ et $D(x) = A(x) - \omega B(x)$.

Calcul de $C(x)C(y)$:

$$\begin{aligned} C(x)C(y) &= [A(x) + \omega B(x)][A(y) + \omega B(y)] \\ &= A(x)A(y) + \omega A(x)B(y) + \omega B(x)A(y) + \omega^2 B(x)B(y) \\ &= [A(x)A(y) + \omega^2 B(x)B(y)] + \omega[A(x)B(y) + A(y)B(x)] \end{aligned}$$

En injectant les relations de $A(x + y)$ et $B(x + y)$ trouvées précédemment :

$$C(x)C(y) = A(x + y) + \omega B(x + y) = C(x + y)$$

Par un calcul analogue (en remplaçant ω par $-\omega$) :

$$D(x)D(y) = A(x + y) - \omega B(x + y) = D(x + y)$$

Déduction de $A(x)$ et $B(x)$: Les fonctions C et D sont continues et vérifient l'équation fonctionnelle de Cauchy ($f(x + y) = f(x)f(y)$). Leurs solutions sont de la forme e^{kx} . On en déduit qu'il existe deux constantes λ_1 et λ_2 telles que :

En résolvant le système pour $A(x)$ et $B(x)$:

$$A(x) = \frac{C(x) + D(x)}{2} = \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}}{2}$$

et

$$B(x) = \frac{C(x) - D(x)}{2\omega} = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2\omega}.$$

- (c) Dans le cas où $\omega = 0$, les relations de récurrence sur les fonctions deviennent :

i. $A(x + y) = A(x)A(y)$

ii. $B(x + y) = A(x)B(y) + A(y)B(x)$

L'équation $A(x + y) = A(x)A(y)$ jointe à la condition de continuité et $A(0) = 1$ impose une forme exponentielle :

En substituant $A(x)$ dans la seconde équation :

$$B(x + y) = e^{\lambda x} B(y) + e^{\lambda y} B(x)$$

Considérons la fonction auxiliaire $f(x) = B(x)e^{-\lambda x}$. L'équation devient :

$$f(x+y)e^{\lambda(x+y)} = e^{\lambda x} f(y)e^{\lambda y} + e^{\lambda y} f(x)e^{\lambda x}$$

En simplifiant par $e^{\lambda(x+y)}$, on retrouve l'équation fonctionnelle de l'additivité :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Puisque B est dérivable, f l'est aussi, donc $f(x) = \mu x$ avec μ une constante.

On en déduit les expressions pour le cas $\omega = 0$:

$$\begin{cases} A(x) = e^{\lambda x} \\ B(x) = \mu x e^{\lambda x} \end{cases}$$

4. Les matrices de rotation plane d'angle x sont définies par :

$$R(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

En identifiant $R(x)$ avec la forme générale $M(x) = \begin{pmatrix} A(x) - pB(x) & qB(x) \\ rB(x) & A(x) + pB(x) \end{pmatrix}$, on obtient :

- $p = 0$ (termes diagonaux égaux)
- $q = -1$ et $r = 1$ (termes non-diagonaux opposés)

Calculons le paramètre ω^2 pour ce cas :

$$\omega^2 = p^2 + qr = 0^2 + (-1)(1) = -1 \implies \omega = \pm i$$

D'après l'étude du cas $\omega \neq 0$ et on posant $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$, on retrouve les formules d'Euler :

$$A(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(x)$$

et

$$B(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\omega} = \sin(x).$$

Conclusion : L'étude générale englobe donc les rotations planes comme un cas particulier où le discriminant ω^2 est négatif.

5. On sait d'après la question 1. que les matrices $M(x)$ commutent entre elles :

$$M(x)M(y) = M(y)M(x)$$

Puisqu'elles sont supposées diagonalisables et qu'elles commutent, elles sont simultanément diagonalisables. Cela signifie qu'il existe une matrice de passage P fixe (indépendante de x) telle que pour tout x :

$$M(x) = P \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Utilisons la propriété fondamentale $M(x+y) = M(x)M(y)$. En remplaçant par la forme diagonalisée :

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1(x+y) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x+y) \end{pmatrix} P^{-1} = \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix} P^{-1} \right) \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1(y) & 0 \\ 0 & \lambda_2(y) \end{pmatrix} P^{-1} \right)$$

En simplifiant par P à gauche et P^{-1} à droite, et en utilisant $P^{-1}P = I$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(x+y) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x)\lambda_1(y) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x)\lambda_2(y) \end{pmatrix}$$

On en déduit l'équation fonctionnelle pour chaque valeur propre :

$$\lambda_i(x+y) = \lambda_i(x)\lambda_i(y)$$

Reprenons maintenant la forme générale de la matrice $M(x)$ établie à la question (2) :

$$M(x) = \begin{pmatrix} A(x) - pB(x) & qB(x) \\ rB(x) & A(x) + pB(x) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\chi_{M(x)} = \det(M(x) - \lambda I) = (A(x) - \lambda)^2 - (p^2 + qr)B(x)^2.$$

En posant $\omega^2 = p^2 + qr$, l'équation devient $(A(x) - \lambda)^2 = \omega^2 B(x)^2$. On trouve les deux valeurs propres :

$$\lambda_1(x) = A(x) + \omega B(x)$$

$$\lambda_2(x) = A(x) - \omega B(x)$$

Étape 4 : Résolution du système On se retrouve avec le système suivant (en posant $\lambda_i(x) = e^{k_i x}$) :

$$\begin{cases} A(x) + \omega B(x) = e^{k_1 x} \\ A(x) - \omega B(x) = e^{k_2 x} \end{cases}$$

Pour trouver $A(x)$, on fait la somme (1) + (2) :

$$2A(x) = e^{k_1 x} + e^{k_2 x} \implies A(x) = \frac{e^{k_1 x} + e^{k_2 x}}{2}$$

Pour trouver $B(x)$, on fait la différence (1) - (2) :

$$2\omega B(x) = e^{k_1 x} - e^{k_2 x} \implies B(x) = \frac{e^{k_1 x} - e^{k_2 x}}{2\omega}$$

On retrouve donc directement les résultats du paragraphe 3)a. par réduction simultanée.

6. La dérivée d'une matrice est définie par la dérivation de chacun de ses coefficients. Par linéarité de la dérivation scalaire :

$$(M(x) + N(x))' = M'(x) + N'(x)$$

Pour le produit, le coefficient (i, j) de $M(x)N(x)$ est $\sum_{k=1}^2 m_{ik}(x)n_{kj}(x)$. Sa dérivée est :

$$\sum_{k=1}^2 (m'_{ik}n_{kj} + m_{ik}n'_{kj}) \implies (M(x)N(x))' = M'(x)N(x) + M(x)N'(x)$$

Partons de la relation $M(x+y) = M(x)M(y)$. Dérivons cette égalité par rapport à la variable y :

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x+y) = M(x) \frac{d}{dy} M(y) \implies M'(x+y) = M(x)M'(y)$$

