

Devoir libre n°08
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



Exercice : 1 On pose $A_d = \{ (a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a + 2b = d \}$ et $p(d) = \text{card}(A_d)$.

1. On a $A_2 = \{ (0, 1), (2, 0) \}$, $A_3 = \{ (1, 1), (3, 0) \}$ et $A_4 = \{ (0, 2), (2, 1), (4, 0) \}$, d'où $p(2) = p(3) = 2$ et $p(4) = 3$.

2. On sait que pour $t \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ et $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}$. Les deux séries sont absolument convergentes sur $] - 1, 1[$, donc leur produit de Cauchy existe et on a :

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

où $c_n = \sum_{k=0}^n t^k t^{2(n-k)} = \sum_{\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid k+2l=n\}} t^n = p(n)t^n$, et par conséquent pour tout $t \in] - 1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n$$

3. Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division euclidienne. Il existe donc a et b et c des réels tels que :

$$\frac{1}{(1-X)(1-X^2)} = \frac{1}{(1-X)^2(1+X)} = \frac{a}{1+X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{1-X}$$

On multiplie par $1+X$, puis $X = -1$

$$a = \left[\frac{1}{(1-X)^2} \right]_{X=-1} = \frac{1}{4}$$

On multiplie par $(1-X)^2$, puis $X = 1$

$$b = \left[\frac{1}{X+1} \right]_{X=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par X puis X tend vers l'infini. D'où $0 = a - c$ et donc $c = a = \frac{1}{4}$.

D'où

$$\frac{1}{(1-X)(1-X^2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+X} + \frac{2}{(1-X)^2} + \frac{1}{1-X} \right)$$

4. Le développement en série entière sur $] - 1, 1[$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Sa dérivée est :

$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n$. D'où, en utilisant la décomposition précédente :

$$\forall t \in] - 1, 1[, \frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + 2(n+1) + 1) t^n$$

D'où, par unicité de la décomposition d'une fonction en série entière, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n) = \frac{(-1)^n + 2n + 3}{4}$$

Exercice : 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto 1 - x \sin^2 t$ est continue et monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc l'ensemble de ses valeurs est le segment d'extrémités $1 - x$ et 1 . Il en résulte que si $x < 1$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{1 - x \sin^2 t}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $f(x)$ est définie pour $x < 1$.

Si $x > 1$, $1 - x \sin^2(t)$ s'annule pour $\sin^2(t) = \frac{1}{x}$, donc $1 - x \sin^2(t)$ n'est pas positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc la racine n'existe pas et f non plus.

Si $x = 1$, on obtient l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)}$ qui est divergente en vertu de l'équivalence $\sin(t) \sim t$ au voisinage de 0.

En conclusion, le domaine de définition de f est $D =] - \infty, 1[$.

2. La fonction $h : (x, t) \in] - \infty, 1[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x \sin^2(t)}}$ a pour dérivée partielle par rapport à x

$$(x, t) \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(t)}{(1 - x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Elle est continue par morceaux en t à x fixé, continue en x à t fixé, de plus pour tout segment $[a, b]$ de $] - \infty, 1[$, la fonction $(x, t) \in [a, b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \frac{1}{2} \frac{\sin^2(t)}{(1 - x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}$ est continue, elle est bornée et donc l'hypothèse de domination est vérifiée. En vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Comme a et b sont arbitraires, f est \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 1[$, et

$$f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{(1 - x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt.$$

De même, on montre que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $] - \infty, 1[$ et

$$f''(x) = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(t)}{(1 - x \sin^2(t))^{\frac{5}{2}}} dt.$$

3. Pour $x \in] - 1, 1[$, on connaît de développement :

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)}{n!} x^n.$$

Quand $\alpha = \frac{-1}{2}$, le coefficient de x^n devient $\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}$. D'où, pour $x \in] - 1, 1[$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x \sin^2(t)}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} (x \sin^2(t))^n.$$

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left| \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} (x \sin^2(t))^n \right| \leq \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$. Le terme à droite est le terme général d'une série convergente, donc la série converge normalement et donc uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc on peut intégrer terme à terme cette série, d'où :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} (x \sin^2(t))^n \right) dt \quad (1)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt \quad (2)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} w_n x^n \quad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} w_n x^n. \quad (4)$$

4. (a) Cherchons des solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0 :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n x^{n-2}.$$

En reportant ces séries dans l'équation (E), on obtient :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{4} x^n = 0$$

Après les changements d'indices nécessaires pour ramener tous les termes à x^n on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} (2n+1)^2 a_n - (n+1)^2 a_{n+1} \right) x^n = 0.$$

Si une fonction développable en série entière est nulle, ses coefficients doivent être nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} a_n = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 a_0.$$

Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1 (règle de d'Alembert).

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sin(t) \cos(t)}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{\cos^2(t)}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin^2(t)}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x \sin^2(t) \cos^2(t)}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x \sin^2(t) \cos^2(t)}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{(1-2 \sin^2(t))(1-x \sin^2(t))}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x \sin^2(t) \cos^2(t)}{4(1-x \sin^2(t))^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2(t) + \frac{1}{2} x \sin^2(t) - \frac{1}{2} x \sin^4(t)}{(1-x \sin^2(t))^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} (x^2 - x)f''(x) + (2x - 1)f'(x) + \frac{1}{4}f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(x^2 - x) \sin^4(t)}{4(1 - x \sin^2(t))^{\frac{5}{2}}} dt + \frac{1}{2} \frac{(2x - 1) \sin^2(t)}{(1 - x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{4(1 - x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt. \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sin(t) \cos(t)}{4(1 - x \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right] dt = 0 \end{aligned}$$

Donc f solution de l'équation différentielle (E). C'est l'unique solution de (E) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = \frac{\pi}{2}$ et $y'(0) = \frac{\pi}{2}$. D'où par unicité,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 x^n.$$

Ainsi, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

5. Si $x > 0, 1 - x \in]-\infty, 0[$, donc g est bien définie et même de classe \mathcal{C}^2 , on a :

$$\begin{aligned} (x^2 - x)g''(x) + (2x - 1)g'(x) + \frac{1}{4}g(x) &= ((1 - x)^2 - (1 - x)) f''(1 - x) \\ &\quad + (2(1 - x) - 1)f'(1 - x) + \frac{1}{4}f(1 - x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc g est bien solution de (E).

Soient α et β des réels tels que $\forall x \in]0, 1[, \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$. On remplaçant x par $\frac{1}{2}$ dans l'équation précédente et sa dérivée on obtient :

$$(\alpha + \beta)f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } (\alpha - \beta)f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$, alors $\alpha = \beta = 0$, donc les f et g forment une base de solutions de l'équation différentielle (E). Ainsi toute solution de E est combinaison linéaire de f et g .

Exercice : 3

1. Soit $f(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{e^t - 1}$. La fonction f est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, f se prolonge par continuité en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = b - a$ et au voisinage de $+\infty, f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en conclut la convergence de l'intégrale de f sur $]0, +\infty[$.

On remarque que $f(t) = \frac{e^{-(1+a)t} - e^{-(1+b)t}}{1 - e^{-t}}$ et que $e^{-t} \in]0, 1[$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, donc $\frac{1}{1 - e^{-t}} =$

$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}$, d'où :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-(1+a)t} - e^{-(1+b)t}) e^{-kt} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$$

où $u_k(t) = e^{-(k+1+a)t} - e^{-(k+1+b)t}$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est continue par morceaux puisque c'est la fonction f .
Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} (e^{-(k+1+a)t} - e^{-(k+1+b)t}) dt = \frac{1}{k+1+a} - \frac{1}{k+1+b} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b-a}{k^2}.$$

Puisque la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^{+\infty} |u_k(t)| dt$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{e^t - 1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} u_k(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1+a} - \frac{1}{k+1+b} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right).$$

2. Si $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{4}} - e^{-\frac{3t}{4}}}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{n + \frac{3}{4}} \right) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}.$$

D'autre part, en utilisant le changement de variable $y = e^{-t}$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{4}} - e^{-\frac{3t}{4}}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \frac{y^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{3}{4}}}{1-y} dy \tag{5}$$

$$\stackrel{y=u^4}{=} 4 \int_0^1 \frac{u^4}{1+u^2} du \tag{6}$$

$$= 4 \int_0^1 \left((u^2 - 1) + \frac{1}{1+u^2} \right) du \tag{7}$$

$$= 4 \left[\frac{u^3}{3} - u + \arctan u \right]_0^1 \tag{8}$$

$$= \pi - \frac{8}{3} \tag{9}$$

Finalement, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{4}} - e^{-\frac{3t}{4}}}{e^t - 1} dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}$ puis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice : 4

1. Soit $F_1(u) = \int_{+\infty}^u f(t) dt$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)(e^{-xt} - 1) dt &= [F_1(u)(e^{-xu} - 1)]_{u=0}^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} F_1(u) e^{-xu} du \\ &= x \int_0^{+\infty} F_1(u) e^{-xu} du \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{u \rightarrow +\infty} F_1(u) = 0$, alors il existe $A > 0$ tel que $\forall u \geq A, |F_1(u)| \leq \varepsilon$. D'où, pour $x > 0$:

$$x \left| \int_0^{+\infty} F_1(u) e^{-xu} du \right| \leq x \left| \int_0^A F_1(u) e^{-xu} du \right| + \varepsilon x \int_A^{+\infty} e^{-xu} du.$$

Or $\left| \int_0^A F_1(u) e^{-xu} du \right| \leq \int_0^A |F_1(u)| du$ et $x \int_A^{+\infty} e^{-xu} du = e^{-xA} \leq 1$. Donc, pour tout $x > 0$, on a :

$$x \left| \int_0^{+\infty} F_1(u) e^{-xu} du \right| \leq x \int_0^A |F_1(u)| du + \varepsilon.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]0, \alpha[, \left| \int_0^{+\infty} f(t)(e^{-xt} - 1) dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

2. • L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$ n'existe pas, mais pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{x+i}{x^2+1} \right) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} dt = 0$. Donc, en général, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ peut exister sans que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

• Supposons $\lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$ et notons $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$\left| \int_0^x f(t) dt - l \right| \leq \left| \int_0^x f(t)(1 - e^{-tx}) dt \right| + \left| \int_x^{+\infty} f(t) dt \right| + \left| \int_x^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt - l \right|.$$

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \geq \alpha, |tf(t)| < \varepsilon$. On a également,

$$\left| \int_x^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} |tf(t)| e^{-xt} dt.$$

Mais $\forall x > 0, \forall t \geq 0, 0 \leq 1 - e^{-xt} \leq xt$, donc $\int_0^x f(t)(1 - e^{-xt}) dt \leq x \int_0^x |tf(t)| dt$. On pose

$x = \frac{1}{X}$, on prouve facilement que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \int_0^{\frac{1}{x}} tf(t) dt \right) = 0$. De même, on a $\frac{1}{x} \int_x^{+\infty} |tf(t)| e^{-xt} dt =$

$x \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} |tf(t)| e^{-xt} dt$. Il est immédiat que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} |tf(t)| e^{-xt} dt = 0.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt - l \right| = 0$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ existe et vaut l .

