

Devoir libre n°07  
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



Première partie

1. Rayons de convergence :

(a) **Exemple :** On  $a_1 = 1$  et  $a_n = 0$  pour  $n \geq 2$ ,  $b_1 = b_2 = 1$ . Supposons que  $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 1$ .

Alors  $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = 1$ . Donc  $b_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les rayons de convergence

sont  $R_1 = +\infty$  et  $R_2 = 1$ . Les sommes sont  $A(x) = x$  et  $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ .

(b) On a  $b_1 = a_1 \geq 0$  et  $a_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ . Supposons que pour tout  $k \leq n-1$ ,  $0 \leq b_k \leq 1$ , alors

$$b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \leq a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

Puisque  $0 \leq a_n \leq 1$  et  $0 \leq b_n \leq 1$ , les rayons de convergence  $R_1$  et  $R_2$  sont supérieurs ou égaux à 1.

(c) Soit  $x \in ]-1, 1[$ . La relation de récurrence donne

$$b_n x^n = a_n x^n + \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

d'où,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Il s'agit d'un produit de Cauchy de deux séries entières de rayons de convergence au moins égaux à 1, d'où :

$$B(x) = A(x) + A(x)B(x) \tag{1}$$

La fonction est bien définie en  $x = 1$  puisque la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$  converge. Si  $R_2 > 1$ , alors 1 est dans le domaine de définition de  $B$  et la relation (1) donne

$$B(1) = 1 + B(1)$$

ce qui est absurde. Donc  $R_2 \leq 1$  et donc  $R_2$  est exactement égal à 1.

(d) **Application :**  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)\lambda^{n-1}x^n = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x}$  avec un rayon de convergence  $R_1 = \frac{1}{\alpha}$ . D'où

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-A(x)} = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x} \frac{1-\alpha x}{1-x} = (1-\alpha) \frac{x}{1-x}$$

et  $b_n = 1 - \alpha$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**2. Convergence de la suite  $(b_n)_{n \geq 1}$**

(a) • Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ , on a :

$$|A(z)| < \sum_{n=1}^p |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

Donc il n'y a pas de racines dans disque ouvert  $D(0, 1)$  et par conséquent les racines de  $(E)$  se trouvent en dehors de  $D(0, 1)$ , c'est-à-dire elles sont de module supérieur ou égal à 1.

• On a  $A'(1) = \sum_{n=1}^p n a_n > \sum_{n=1}^p a_n = 1 > 0$  ( inégalité stricte puisque  $a_p \neq 0$  ). Donc  $A'(1) \neq 0$  ce qui prouve que  $x_1 = 1$  est racine simple de  $A(X) - 1$ .

• Pour  $|z| = 1$ ,  $|A(z)| \leq \sum_{n=1}^p |a_n| = 1$ , et l'on ne peut avoir égalité que si les complexes  $x_n$  correspondants aux coefficients non nuls  $a_n$  sont de même argument. L'argument de  $A(x)$  est alors l'argument commun à ces complexes  $x_n$  qui doit donc être nul ( modulo  $2\pi$  ) si  $A(z) = 1$ . Comme en particulier  $a_1$  n'est pas nul,  $z$  doit être réel positif, donc égal à 1.

(b) • D'après ce qui précède,

$$B(x) = \frac{A(x)}{1 - A(x)} = \frac{A(x)}{a_p \prod_{i=1}^p (x - x_i)}.$$

Puisque les racines sont simples, la décomposition de  $B(x)$  en éléments simples s'écrit

$$B(x) = -1 + \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{x - x_i} \tag{2}$$

avec  $\alpha_i = -\frac{A(x_i)}{A'(x_i)}$ .

• En développant chaque fraction élémentaire en série entière, on obtient :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{\alpha_i}{x - x_i} = -\frac{\alpha_i}{x_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_i}\right)^n,$$

d'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{i=1}^p \frac{A(x_i)}{x_i^{n+1} A'(x_i)}$ .

• Pour  $i \geq 2$ ,  $|x_i| > 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{A(x_1)}{A'(x_1)} = \frac{1}{A'(1)}$ .

**Deuxième partie**

**1. Rayon de convergence  $R_3$**

(a) **Exemple :** si  $a_n = (1 - \alpha)\alpha^{n-1}$ ,  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 - \alpha)\alpha^{k-1} = \alpha^n$ . D'où  $R_3 = \frac{1}{\alpha}$  et  $R(x) = \frac{1}{1 - \alpha x}$ .

(b) Puisque les  $a_n$  sont positifs ou nuls, il en est de même des  $r_n$ . De plus,  $0 \leq r_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$   
d'où  $R_3 \geq 1$ .

(c) Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Comme  $a_n = r_{n-1} - r_n$ , alors

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n = (x-1)R(x) + r_0.$$

D'où, puisque  $r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ ,

$$R(x) = \frac{A(x) - 1}{x - 1} \tag{3}$$

**2. Un résultat intermédiaire**

(a) En tout point  $x \in ]-1, 1[$  la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} Mx^n$  converge, donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n x^n$  converge. Donc

$$\rho \geq 1.$$

(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Pour  $x \in [0, 1[$ ,

$$U(x) - \frac{l}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - l)x^n \text{ avec } u_0 = 0, \text{ donc :}$$

$$\left| U(x) - \frac{l}{1-x} \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{n_0-1} (u_n - l)x^n \right| + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} x^n \leq \left| \sum_{n=0}^{n_0-1} (u_n - l)x^n \right| + \frac{\varepsilon}{2(1-x)}$$

et

$$|(1-x)U(x) - l| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |u_n - l|x^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq n_0(1-x)(M+l) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} n_0(1-x)(M+l) = 0$ , donc on peut alors trouver  $\alpha \in [0, 1[$  tel que

$$\forall x \in [\alpha, 1[, \quad n_0(1-x)(M+l) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où  $|(1-x)U(x) - l| \leq \varepsilon$ . Ceci prouve que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x)U(x) = l$  ou encore que  $u(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{l}{1-x}$ .

**3. Calcul de la somme  $S_3$**

(a) On a montré dans la première partie que  $\forall x \in ]-1, 1[, B(x) = A(x) + A(x)B(x)$  d'où

$$A(x) - 1 = -\frac{1}{B(x) + 1}.$$

Comme  $B(x)$  est équivalent au voisinage à gauche de 1 à  $\frac{l}{1-x}$ . On obtient  $A(x) - 1 \underset{1^-}{\sim} \frac{x-1}{l}$ .

(b) On déduit alors que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} R(x) = \frac{1}{l}$ . Puisque  $r_n \geq 0$  pour tout  $n$ , on en tire d'une part  $R(x) \leq \frac{1}{l}$

$$\forall x \in [0, 1[, \text{ puis } \sum_{k=0}^n r_k x^k \leq \frac{1}{l} \text{ pour tout } x \in [0, 1[ \text{ et tout } n \in \mathbb{N} \text{ et enfin } \sum_{k=0}^n r_k \leq \frac{1}{l} \text{ pour tout}$$

$n \in \mathbb{N}$  en faisant tendre  $x$  vers 1. Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} r_n$

converge et  $S_3 = \frac{1}{l}$ .

