Devoir libre $n°06$
Correction

*N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.*

• • • • • • • • • • •

**Exercice : 1**

**1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n+n^2x^2) = +\infty$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

**2.** On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$ et donc $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leq \dfrac{1}{n}$. Inégalité qui montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

**3.** Par convergence uniforme, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2025} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2025}\lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2025} 0\mathrm{d}t = 0.$$

**4.** La convergence uniforme ne suffit pas d'intervertir $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}$ comme le montre exemple suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n(x) = e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$ converge simplement vers la fonction nulle, de plus $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = f_n(n) = e^{-n}\dfrac{n^n}{n!}$ qui tend vers 0 ( d'après la formule de Stirling $n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$ ), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers nulle sur $[0,+\infty[$. Cependant

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \neq \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t,$$

puisque

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\frac{t^n}{n!}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t = I_{n-1} = \ldots = I_0 = 1$$

ne tend pas vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

**5.** Avec le changement de variable $u = \sqrt{n}t$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{n+n^2t^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0 = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

**6.** Si $x \neq 0$, $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(0)$ diverge. Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge. Ainsi, la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

**7.** L'étude de la fonction $f_n$ sur $]0,+\infty[$, montre qu'elle est bornée et que $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n}$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$.

**8.** Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x \in [\alpha,+\infty[$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+n^2\alpha^2} = f_n(\alpha)$, donc $\|f_n\|_\infty^{[\alpha,+\infty[} \leq f_n(\alpha)$ et la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(\alpha)$ converge. Donc le série converge normalement et donc uniformément sur tout intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$, de plus les fonctions $f_n$ sont continues sur $]0,+\infty[$. Donc la fonction somme $F$ est continue sur $]0,+\infty[$.

**9.** Chaque $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{-2n^2x}{(n+n^2x^2)^2}$. Maintenant, si $x \in [a,b] \subset ]0,+\infty[$, $|f_n'(x)| = \dfrac{2n^2x}{(n+n^2x^2)^2} \leq \dfrac{2n^2b}{(n+n^2a^2)^2}$ et donc $\|f_n'\|_\infty^{[a,b]} \leq \dfrac{2n^2b}{(n+n^2a^2)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2b}{a^4}\dfrac{1}{n^2}$. Donc on a la convergence normale sur $[a,b]$.

**10.** D'après la question précédente la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$, donc d'après le théorème de cours $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in ]0,+\infty[$,

$$F'(x) = -2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+n^2x^2)^2}.$$

**11.** D'après la question précédente, $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Donc $F$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

**12.** Si $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{(1+x^2)k^2} \leq f_k(x) \leq \dfrac{1}{x^2k^2}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{1+x^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Quand $n$ tend vers $\infty$ on obtient l'inégalité demandée.

**13.** L'inégalité $\dfrac{\pi^2}{6(1+x^2)} \leq F(x) \leq \dfrac{\pi^2}{6x^2}$ montre $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2F(x) = \dfrac{\pi^2}{6}$, d'où $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x^2}$.

**14.** Soit $x > a$, on a $0 \leq \displaystyle\int_a^x F(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\pi^2}{6}\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{\pi^2}{6}\left[\frac{-1}{t}\right]_a^x = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\pi^2}{6a}$. Donc, comme $F$ est à valeurs positives, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$ est croissante et majorée ( par $\dfrac{\pi^2}{6a}$ ), donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$ existe.

**15.** La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t+t^2x^2}$ est décroissante sur $[n,n+1]$, donc $\forall x \in [n,n+1]$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)+(n+1)^2x^2} \leq \frac{1}{t+t^2x^2} \leq \frac{1}{n+n^2x^2} = f_n(x).$$

Donc l'inégalité demandée s'obtient par intégration sur le segment $[n,n+1]$.

**16.** L'inégalité à droite entraîne, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Lorsque $N$ tend vers l'infini, on obtient $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x)$.

L'inégalité à gauche entraîne

$$\sum_{n=1}^{N} f_{n+1}(x) \leq \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Lorsque $N$ tend vers l'infini, on obtient $F(x) - f_1(x) \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ou encore :

$$F(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}.$$

**17.** Il est clair que $\dfrac{1}{t+x^2t^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x^2}{1+x^2t}$, d'où :

$$\forall y \geq 1,\ \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} = \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{y} \frac{x^2\mathrm{d}t}{1+x^2t} = \ln y - \ln(1+x^2y) + \ln(1+x^2) = \ln\left(\frac{y}{1+x^2y}\right) + \ln(1+x^2)$$

D'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+x^2t^2} = \ln(1+x^2) + \lim_{y\to\infty} \ln\left(\frac{y}{1+x^2y}\right) = \ln(1+x^2) + \ln\frac{1}{x^2} = \ln(1+x^2) - 2\ln(x).$$

On obtient donc l'inégalité demandée.
L'inégalité précédente s'écrit aussi, en divisant par $-2\ln(x)$ qui est positif pour $x \in ]0,1[$ :

$$1 - \frac{\ln(1+x^2)}{2\ln(x)} \leq \frac{F(x)}{-2\ln(x)} \leq \frac{1}{-2(1+x^2)\ln(x)} + 1 - \frac{\ln(1+x^2)}{2\ln(x)}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{F(x)}{-2\ln(x)} = 1$ et par conséquent $F(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -2\ln(x)$.

**18.** Comme $F(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -2\ln(x)$ les intégrales $\displaystyle\int_0^a F(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^a -2\ln(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or $\displaystyle\int_x^a \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^a = a\ln(a) - a - x\ln(x) + x$, donc $\displaystyle\int_0^a F(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to0^+} \int_x^a F(t)\mathrm{d}t$ existe.

**19.** $F$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

**20.** On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}$, c'est le terme général d'une série convergente, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme dans un intervalle quelconque, la fonction $F$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ( ce qui est déjà démontré dans les questions **14.** et **18.** ) et on peut intervertir $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ dans l'égalité

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

●●●●●●●●●●