Devoir libre $n°05$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Exercice : 1

1. Démonstration dans les cas $p=2$. Notons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et posons $b_n = 2^n a_{2^n}$. On a :

$$U_{2^{p+1}} - U_{2^p} = \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} a_k.$$

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il est clair que, pour $k = 2^p+1, ..., 2^{p+1}$,

$$a_{2^p+1} \leq a_k \leq a_{2^p+1}$$

donc, en sommant,

$$2^p a_{2^{p+1}} \leq U_{2^{p+1}} - U_{2^p} \leq 2^p a_{2^p+1}.$$

Ensuite, on a, d'une part

$$2^p a_{2^{p+1}} = \frac{1}{2} 2^{p+1} a_{2^{p+1}} = \frac{1}{2} b_{p+1}$$

et d'autre part

$$2^p a_{2^p+1} \leq 2^p a_{2^p} = b_p.$$

Finalement, on a bien

$$\frac{1}{2} b_{p+1} \leq U_{2^{p+1}} - U_{2^p} \leq b_p \tag{1}$$

Notons V_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Pour $n \geq 1$, on a, en sommant les inégalités (1) pour $p = 0, 1, ..., n-1$.

$$\frac{1}{2}(V_n - u_1) \leq U_{2^n} - U_1 \leq V_{n-1} \tag{2}$$

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et l'inégalité de gauche de (2) montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge.

Réciproquement, si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et l'inégalité de droite de (2) montre que la suite $(U_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi puisque $U_n \leq U_{2^n}$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est donc convergente. Ainsi les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sont bien de même nature.

2. Considérons $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Il est clair que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est positive et tend vers 0, quelle que soit la valeur de $\alpha \in]0, +\infty[$. On obtient alors

$$b_n = \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Comme série série géométrique, $\sum_{n\geq 1} b_n$ et donc $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice : 2

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_k = \displaystyle\sum_{i=kT}^{kT+T-1} \frac{p_i}{i}$ et $v_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{T-1} \frac{p_i}{i}$. On a :

$$v_k = \sum_{i=kT}^{kT+T-1} \frac{p_i}{i} = \sum_{j=0}^{T-1} \frac{p_{kT+j}}{kT+j} = \sum_{j=0}^{T-1} \frac{p_j}{kT+j}$$

par le changement d'indice $i = kT + j$ et par T-périodicité de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\frac{1}{kT+j} = \frac{1}{kT}\left(\frac{1}{1+\frac{j}{kT}}\right) = \frac{1}{Tk}\left(1 - \frac{j}{Tk} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{Tk} - \frac{j}{T^2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$v_k = \left(\sum_{j=0}^{T-1} p_j\right)\frac{1}{Tk} - \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{T-1} jp_j}{p^2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

(bien remarquer que T est fixé et que la somme de T suites négligeables devant $\dfrac{1}{k^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{k^2}$).

Ainsi si $\displaystyle\sum_{j=0}^{T-1} p_j = 0$ (équivalent à $\displaystyle\sum_{j=1}^{T} p_j = 0$ par périodicité), alors $v_k = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ converge absolument, donc converge.

2. Montrons maintenant que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{p_n}{n}$ sont de même nature et qu'elles ont la même somme.

Lorsque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\displaystyle\sum_{j=1}^{T} p_j = 0$, prenons n un entier et k entier définie par $kT \leq n < kT + T - 1$.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{j} - \sum_{j=0}^{k} v_j\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{kT+T-1} \frac{p_j}{j}\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{kT+T-1} \frac{p_j}{j}\right|$$

d'où

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{j} - \sum_{j=0}^{k} v_j\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=n+1}^{kT+T-1}\left|\frac{p_j}{j}\right| = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{p-1} |p_j|.$$

On conclut que la série de terme général v_n converge vers la même limite que la série de terme général $\frac{p_n}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Exercice : 3

1. Notons U_n la somme des n premiers termes de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$. On a :

$$U_n = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(x)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x,$$

où $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(2kx)$, qui est la partie imaginaire de la somme $\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} = \frac{1-e^{(2n+2)ix}}{1-e^{2ix}}$. Cette dernière s'écrit $e^{inx}\frac{\sin(n+1)x}{\sin(x)}$.

D'où $S_n(x) = \frac{\sin(nx)\sin(n+1)x}{\sin(x)}$ et par conséquent :

$$U_n = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx \sin(n+1)x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

ou encore

$$U_n = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x + \cos(2n+1)x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{I_n}{4}$$

avec $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

Une intégration par parties donne

$$(2n+1)I_n = \left[\frac{\sin(2n+1)x}{1+\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin(2n+1)x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

Mais

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin(2n+1)x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x)^2},$$

donc $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$. En conclusion, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et a pour somme $\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n - u_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2n+1)x \tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)\cos(2n+1)x\mathrm{d}x,$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2nx + \cos(2n+2)x)\mathrm{d}x.$$

On a donc :

$$u_0 - u_1 = 1 - \frac{\pi}{4},\;\; u_n - u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}\;\; (n \geq 1).$$

Compte tenu de $u_0 = 0$, il en résulte :

$$-u_{n+1} = -\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} = -R_n.$$

D'où la convergence de la série de terme général R_n et l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

3. R_n est le reste d'indice n d'une série alternée dans laquelle la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. Il en résulte que

$$|u_n - u_{n+1}| = |u_n| + |u_{n+1}| \text{ et } |u_n| + |u_{n+1}| = \frac{1}{2n+1}$$

On en déduit que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |R_n|$ divergent.