

Devoir libre n°04
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



1. (a) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i = 0$. Donc pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i(a) = 0$, en particulier, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i(a) = \alpha_k f_k(k) = \alpha_k$. Donc la famille est bien libre.

Maintenant, soit f un élément quelconque de V_n et $\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ l'ensemble des valeurs prises par f (f prend au plus n valeurs, car elle est n -périodique).

Posons $g = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i$. On a, pour tout $a \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $g(a) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i(a) = c_i$, donc f et g coïncident sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et par périodicité elles coïncident sur \mathbb{Z} . D'où $f = g$, c'est-à-dire f est une combinaison linéaire des $(f_i)_{0 \leq i \leq n-1}$.

En conclusion, la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ est une base de V_n , et donc $\dim V_n = n$.

- (b) On peut vérifier facilement que l'application $f \mapsto (f(0), f(1), \dots, f(n-1))$ définit un isomorphisme de V_n sur \mathbb{C}^n .
2. (a) L'application $e_r \in V_n$ si, et seulement si, $\forall a \in \mathbb{Z}, r^{n+a} = r^a$ ou encore si, et seulement si, $r^n = 1$. Donc l'ensemble U est celui des racines n -ième de l'unité.
- (b) Notons r_0, r_1, \dots, r_{n-1} les racines n -ème de l'unité. Soient $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{r_i} = 0$. En particulier pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i r_i^k = 0.$$

Cette relation s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_0^{n-1} & r_1^{n-1} & \cdots & r_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Comme la matrice de Vandermonde est inversible (les r_i sont deux à deux distincts), alors nécessairement $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Donc la famille $(e_r)_{r \in U}$ est libre et comme il s'agit d'une famille à n éléments alors c'est une base de V_n .

3. (a) Soit λ une valeur propre de φ et $f \in V_n$ un vecteur propre non nul associé à λ . Donc $\forall a \in \mathbb{Z}, f(a+1) = \lambda f(a)$. Ceci entraîne $\forall a \in \mathbb{Z}$:

$$f(a) = \lambda f(a-1) = \lambda^2 f(a-2) = \dots = \lambda^n f(a-n) = \lambda^n f(a).$$

f étant non nulle, donc il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $f(a) \neq 0$. L'égalité précédente donne $\lambda^n = 1$. Donc λ est une racine n -ème de l'unité.

