Devoir libre $n^\circ 11$
Correction

*N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.*

# Exercice 1

Supposons $l > 0$ ( $f$ à valeurs strictement positives ), donc il existe $A > a$ tel que $x \geq A$ implique $f(x) \geq l$ et donc

$$\forall x \geq A,\quad \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geq \int_A^x f(t)\mathrm{d}t \geq \int_\alpha^x l\mathrm{d}t = l(x-A).$$

Ceci conduit à une contradiction lorsque $x$ tend vers $+\infty$, d'où nécessairement $l = 0$.

# Exercice 2

**1.** Il existe des scalaires $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels tels que $\dfrac{1}{(t+1)(t+2)...(t+n)} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t+i}$ ( décomposition en éléments simples ) avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{t+i}{(t+1)(t+2)...(t+n)} = a_i + \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{a_j(t+i)}{t+j}$. Ainsi

$$a_i = \frac{1}{(-i+1)(-i+2)...(-i+n)} = \prod_{j\neq i} \frac{1}{(-i+j)}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)...(t=n)} &= \sum_{i=1}^n a_i \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+i} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \left(\ln(x+i) - \ln(i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \ln\left(1 + \frac{x}{i}\right)
\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(t+1)(t+2)...(t+n)} = 0$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i = 0$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)...(t=n)} &= -\sum_{i=1}^n a_i \ln(i) + \sum_{i=1}^n a_i \ln(x+i) \\
&= -\sum_{i=1}^n a_i \ln(i) + \ln(x)\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i \ln\left(1 + \frac{i}{x}\right)
\end{aligned}$$

Le dernier terme vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)...(t=n)} = -\sum_{i=1}^n a_i \ln(i).$$

2. **Existence :** La fonction $f : t \to E\left(\frac{1}{t}\right)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

• Si $t > 1$, $E\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ et donc $f$ est nulle sur $]1,+\infty[$, ainsi $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

• Si $t \in ]0,1[$, $E\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{1}{t} \leq E\left(\frac{1}{t}\right) + 1$ et donc $1 - t \leq f(t) \leq 1$, ce qui montre que $f$ est prolongeable par continuité en 0 ( par 1 ), donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

**Calcul :** On a $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} tE\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} tE\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$, mais :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{1} tE\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} tE\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} kt\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k\left[t^2\right]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

D'où $I = \frac{\pi^2}{12}$.

3. Posons $J = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_1^{n} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

donc $\lim_{n\to\infty} J_n$ existe ( d'après le critère spécial des séries alternées ), soit $S$ sa somme. Montrons que $J = S$.
Soit $x > 1$ et $n = E(x)$, alors $n \leq x < n+1$ et

$$\int_1^{x} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{n} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t + \int_n^{x} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left|\int_n^{x} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_n^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\frac{x}{n}\right)$$

et comme $1 \leq \frac{x}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n} = 1$ et par conséquent $\lim_{x\to\infty} \int_0^{x} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t = S$, doù :

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

**Calcul de $S$ :** Puisque la série converge, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(1\times 3\times\ldots\times(2n-1))^2\times(2n+1)}{(2\times 4\times\ldots\times(2n))^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\right).
\end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling [1] $\displaystyle\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{4n}}\times\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{2\pi n})^4}\times(2n) = \frac{2}{\pi}$. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et on a montré que

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(t)}}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

# Exercice 3

**1.** Pour tout $x>0$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et vérifie $f_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ converge.

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$$

Or $\dfrac{e^{-t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^{-t}}{t}\right)$, donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} 0\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)$, d'où :

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

**2.** Par intégration par parties, on a :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x - \int_1^x\frac{e^t}{t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^t}{t}+e^t\, st^2\right]_1^x + \int_1^x\frac{2e^t}{t^3}\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_1^x\frac{2e^t}{t^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{2e^t}{t^3}\right]_1^x + \int_1^x\frac{6e^t}{t^4}\mathrm{d}t$$

Mais $\dfrac{e^t}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^t}{t^3}\right)$ et $t\mapsto\dfrac{e^t}{t}$ non intégrable sur $[1,+\infty[$, donc

$$\int_1^x\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} 0\left(\int_1^x\frac{e^t}{t^3}\right)$$

1. La formule de Stirling, du nom du mathématicien écossais James Stirling, donne un équivalent de la factorielle d'un entier naturel $n$ quand $n$ tend vers l'infini $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$ que l'on trouve souvent écrite ainsi $n\,! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

ce qui donne

$$\int_1^x \frac{2e^t}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{2e^x}{x^3} - 2e \underset{x\to+\infty}{+} o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\mathrm{d}t\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2e^x}{x^3}$$

d'où

$$\int_1^x \frac{2e^t}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} \underset{x\to+\infty}{+} o\left(\frac{2e^x}{x^3}\right).$$

# Exercice 4

**1.** À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$ :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

D'une part, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$.
D'autre part, $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, car $\left|\dfrac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Il en résulte que la fonction $\lim\limits_{x\longmapsto\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ existe, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.
Comme $t \mapsto 1-\cos(t)$ est une primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}^+$, une intégration par partie (on travaille sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$ ) donne

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*,\quad \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Comme $1-\cos(t) = 2\sin^2(t)$, on a donc $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}\mathrm{d}t$. Dans l'intégrale, on pose $u = \dfrac{t}{2}$, on a alors

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + 2\int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\mathrm{d}u.$$

Le membre de gauche admet une limite quand $a$ tend vers 0 et quand $b$ tend vers $+\infty$. Il en va de même du crochet ( de limite nulle, en particulier car $1-\cos(t) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ ) et en passant à la limite, on obtient l'existence de l'intégrale de $\dfrac{\sin^2(u)}{u^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

**2.** Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont respectivement strictement concaves et strictement convexes sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les graphes de ces fonctions sont respectivement strictement au-dessous et strictement au-dessus de leur tangente en $(0,0)$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc $\forall t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin t < t < \tan t$.
Puisque, pour $t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin t < t < \tan t$, on a aussi après passage à l'inverse et élévation au carré $\forall t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cot^2 t < \dfrac{1}{t^2} < \dfrac{1}{\sin^2 t}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, \sin^2 nt \cot^2 t < \frac{\sin^2 nt}{t^2} < \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}$$

puis par intégration entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, $B_n \leq I_n \leq A_n$.

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt + \sin^2(n+2)t - 2\sin^2(n+1)t}{t^2} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2 nt - \sin^2(n+1)t) + (\sin^2(n+2)t - \sin^2(n+1)t)}{t^2} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par les formules trigonométriques et des calculs élémentaire on peut vérifier que $(\sin^2 nt - \sin^2(n+1)t) + (\sin^2(n+2)t - \sin^2(n+1)t) = \sin^2 t \cos 2(n+1)t$, d'où :

$$(*) \ \ A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(n+1)t\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+2}\left[\sin 2(n+1)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

D'autre part, $A_n - B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t^2 nt \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nt\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\cos 2nt}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}$.
D'après la relation $(*)$ le terme général $A_n$ est de la forme $A_n = \alpha n + \beta$ ( l'équation caractéristique admet 1 comme racine double ). Comma $A_0 = 0$ et $A_1 = \dfrac{\pi}{2}$, alors $A_n = \dfrac{\pi n}{2}$ et en conséquence $B_n = A_n - \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi n}{2} - \dfrac{\pi}{8}$.

**4.** Utilisons le changement de variable $u = nt$ dans l'intégrale définissant $I_n$, on a :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\mathrm{d}t = n\int_0^{\frac{\pi n}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\mathrm{d}u$$

Donc $\dfrac{I_n}{n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi n}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\mathrm{d}u$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi n}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$.
D'autre part et d'après la question 3., on a :

$$\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8n} \leq \frac{I_n}{n} \leq \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$ et par suite $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

# Exercice 5

**1.** Soit $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, $l = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $x > A \Rightarrow |F(x) - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, ainsi

$$\forall x > A, \forall y > A, \ \ |F(x) - F(y)| \leq |F(x) - l| + |F(x) - l| \leq \varepsilon$$

et $\left|\displaystyle\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| \varepsilon$.
$f$ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y > \alpha, \ \ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

ou encore

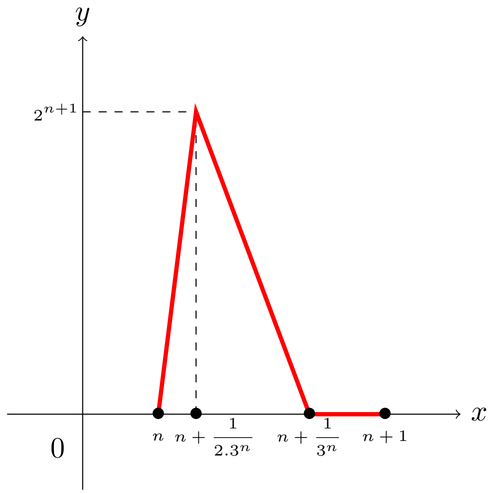
$$\forall x, y > \alpha, \ \ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow f(y) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon$$

Donc

$$\int_x^{x+\alpha} f(y)\mathrm{d}y - \alpha\varepsilon \leq \alpha f(x) \leq \int_x^{x+\alpha} f(y)\mathrm{d}y + \alpha\varepsilon.$$

on choisit donc $A > 0$ tel que $x \geq A \Rightarrow \left|\displaystyle\int_x^{x+\alpha} f(y)\mathrm{d}y\right| \leq \alpha\varepsilon$, d'où $\forall x \geq A$, $|f(x)| \leq 2\varepsilon$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**2.** (a)




(b) Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\triangle(x)$ existe ( finie ou $+\infty$ ), donc on doit avoir $\lim\limits_{n\to\infty}\triangle(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\triangle\left(n+\dfrac{1}{2.3^n}\right)$, ce qui est absurde puisque $\triangle(n)=0$ et $\triangle\left(n+\dfrac{1}{2.3^n}\right)=2^{n+1}$, donc $\triangle$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

(c) $\triangle$ est continue sur tout segment $]n,n+1[$ et $\lim\limits_{x\to n^-}\triangle(x)=\lim\limits_{n\to n^+}\triangle(x)=0$. Donc $\triangle$ est continue sur $[0,+\infty[$.

(d) Soit $x\in]0,+\infty[$ et $n=E(x)$, on alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x\triangle(t)\mathrm{d}t &= \int_0^n\triangle(t)\mathrm{d}t+\int_n^x\triangle(t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\triangle(t)\mathrm{d}t+\int_n^x\triangle(t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+\frac{1}{3^k}}\triangle(t)\mathrm{d}t+\int_n^x\triangle(t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}+\int_n^x\triangle(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\left|\displaystyle\int_n^x\triangle(t)\mathrm{d}t\right|\le\left|\displaystyle\int_n^{n+1}\triangle(t)\mathrm{d}t\right|=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$. Quand $x$ tend vers $+\infty$, l'entier $n$ tend vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_n^x\triangle(t)\mathrm{d}t=0$ puisque la série géométrique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$ converge ( $-1<\dfrac{2}{3}<1$ ) et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$, d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\triangle(t)\mathrm{d}t$ et sa valeur :

$$\int_0^{+\infty}\triangle(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$

(e) Le résultat de la question 1, ne subsiste pas si on suppose simplement $f$ continue.

# Exercice 6

**1.** Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)f'(t)|\le\dfrac{1}{2}\left(f^2(t)+f''^2(t)\right)$, et comme $f$ et $f''$ sont dans $\mathscr{L}^2$ alors $ff'\in\mathscr{L}^1$.

**2.** On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f'^2(t)\mathrm{d}t$ converge, il est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty}f'^2(t)\mathrm{d}t$ et par conséquent $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$ existe.

Or $\displaystyle\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t = \big[f(t)f'(t)\big]_0^x - \int_0^x f'(t)f''(t)\mathrm{d}t$ ce qui implique

$$(*)\ \ f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x)$ existe. Même raisonnement pour la limite en $-\infty$.

La relation $(*)$ montre aussi que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x)$ existe, alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$ existe et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2(t)\mathrm{d}t$ converge. De même on montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f'^2(t)\mathrm{d}t$ converge et par suite $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(t)\mathrm{d}t$ converge.

**3.** Supposons $f$ intégrable. Posons $\displaystyle F(x) = \int_0^x f(t)f''(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle G(x) = \int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$. $G$ est dérivable et croissante sur $[0, +\infty[$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)$ existe fini ou infinie. Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$, alors d'après $(*)$ on a :

$$F(x) - f(x)f'(x) = -G(x) + f(0)f'(0)$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(F(x) - f(x)f'(x)) = -\infty$, comme $F$ est bornée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$, donc il existe $A > 0$ tel que tout $x \geq A$ on a $f(x)f'(x) \geq 1$ et donc $\displaystyle\int_A^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t \geq x - A$ ce qui entraine $f^2(x) - f^2(A) \geq 2(x - A)$ et par suite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f^2(x) = +\infty$ et donc $f^2$ n'est pas bornée et $f^2$ ne serait pas intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.

**4.** D'après 3. $f' \in \mathscr{L}^2$.

**5.** Pour tout $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f(x)f'(x) \leq f^2(x) + f'^2(x)$, donc $ff'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et admet une limite en $+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)f'(x) = 0$.

**6.** Si $g \in \mathscr{L}^2$, on pose $\|g\|_2 = \big(g^2(t)\mathrm{d}t\big)^{\frac{1}{2}}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_2\|f'\|_2.$$

Or si $\displaystyle F(x,y) = \int_x^y f(t)f''(t)\mathrm{d}t = f(y)f'(y) - f(x)f'(x) - \int_x^y f'2(t)\mathrm{d}t$, alors par passage à la limite en $\pm\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(t)\mathrm{d}t$$

D'où

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(t)\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_2\|f'\|_2.$$

●●●●●●●●●