

Devoir libre n°10

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

Partie I

- Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A - A = 0$ est symétrique positive et donc $A \preceq A$. La relation $\preceq$ est réflexive.
 - L'antisymétrie, qui se ramène à montrer la propriété suivante : si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tXAX = 0$, alors $A = 0$.

Mais si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , on a ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$. Or ${}^tXX \in \mathbb{R}^{+*}$ (${}^tXX = \|X\|_2^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique). Donc, si ${}^tXAX = 0$, $\lambda = 0$. On en déduit que si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tXAX = 0$, $\lambda = 0$, ce pour toute valeur propre λ de A . Et comme A est diagonalisable (théorème spectral), on a bien $A = 0$.

- Si $A \preceq B$ et $B \preceq C$ alors $B - A$ et $C - B$ sont positive. La somme de deux matrices positives étant positive ($((M + N)X|X) = (MX|X) + (NX|X)$), $C - A$ est positive et $A \preceq C$. La relation $\preceq$ est transitive.

En conclusion, $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 & (0) \\ (0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 & (0) \\ (0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$ ne sont pas comparables, donc la relation d'ordre $\preceq$ n'est pas une relation d'ordre total.

- Il est clair tout d'abord que si M est symétrique, alors pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$${}^t(CMC) = {}^tC {}^tM {}^t(C) = {}^tCMC.$$

Puis si M est positive, alors :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ({}^tCMCX|X) = ({}^tCMCX)X = {}^tX {}^tCMCX = {}^t(CX)M(CX) \geq 0.$$

Donc tCMC est bien symétrique positive. Donc il suffit de prendre $M = B - A$ pour conclure.

- Supposons que $0 \preceq A$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A puis $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Puisque $X \neq 0$, on a ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ puis

$$\lambda = \frac{{}^tX(\lambda X)}{{}^tXX} = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq 0.$$

Par suite, les valeurs propres de A sont positives.

Réciproquement, puisque A est symétrique, alors il $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Si $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ décomposée dans $\mathcal{B}$,

$$(X|AX) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

et ceci est équivalent à $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$, c'est-à-dire $0 \preceq A$.

- D'après le théorème spectral $A = {}^tPDP$ avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ diagonale à coefficients diagonaux ≥ 0 (car $0 \preceq A$). Si on pose $\Delta = \text{diag}\left(\lambda_1^{\frac{1}{k}}, \lambda_2^{\frac{1}{k}}, \dots, \lambda_n^{\frac{1}{k}}\right)$ et $B = {}^tP\Delta P$ alors B est symétrique et ses valeurs propres sont les $\lambda_i^{\frac{1}{k}} \geq 0$ (B est semblable à Δ puisque $P^{-1} = {}^tP$). Ainsi B est symétrique et positive et vérifie $B^k = A$.

(b) Soit μ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé. On a alors $AX = B^k X = \mu^k X$. On a donc

$$(*) : \forall \mu \in \text{Sp}(B), \ker(B - \mu I_n) \subset \ker(A - \mu^k I_n)$$

Les valeurs propres de B étant strictement positives ont des k -ièmes deux à deux distincts et, les sous-espaces propres d'une matrice étant en somme directe, on a donc

$$\bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(B)} \ker(B - \mu I_n) \subset \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(B)} \ker(A - \mu^k I_n)$$

B étant diagonalisable le membre de gauche est égal à $\mathbb{R}^n$. Le membre de droite étant inclus dans $\mathbb{R}^n$ on a donc

$$\bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(B)} \ker(B - \mu I_n) = \bigoplus_{\mu \in \text{Sp}(B)} \ker(A - \mu^k I_n) = \mathbb{R}^n$$

De plus, les inclusions dans $(*)$ sont nécessairement des égalités (sinon, on obtiendrait une inclusion stricte en prenant la somme directe).

Finalement, les valeurs propres de A sont les carrés de celles de B et on a égalité des sous-espaces propres correspondants. On peut écrire cela

$$\text{Sp}(B) = \left\{ \lambda^{\frac{1}{k}} \mid \lambda \in \text{Sp}(A) \right\} \text{ et } \forall \lambda \in \text{Sp}(A), \ker(B - \lambda^{\frac{1}{k}} I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)$$

D'après la question précédente, si $B^k = A$ alors B agit comme une homothétie de rapport $\lambda^{\frac{1}{k}}$ sur $\ker(A - \lambda I_n)$. Les sous-espaces propres de A étant supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, B est ainsi parfaitement caractérisée (comme une application linéaire sur une famille de supplémentaires).

Il y a donc unicité B , c'était donc l'unique solution et la façon dont l'a construite nous indique que B est diagonalisable dans une base orthonormée diagonalisant A .

(c) Soit A définie positive ($A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres sont strictement positives). 0 n'est pas valeur propre de A (question 2.) et A est donc inversible. A^{-1} est symétrique (comme A) et définie positive (ses valeurs propres, les inverses de celles de A , sont strictement positives). $A^{\frac{1}{k}}$ est elle aussi définie positive (ses valeurs propres sont les racines k -ièmes de celles de A). Si on pose $A^{\frac{-1}{k}} = \left(A^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}$ on a une matrice symétrique définie positive et

$$A^{\frac{-1}{k}} A^{\frac{-1}{k}} = \left(\left(A^{\frac{1}{k}} \right)^k \right)^{-1} = A^{-1}$$

L'unicité d'une telle matrice $A^{\frac{-1}{k}}$ a été justifiée en question précédente.

Il a été justifié ci-dessus que

$$A^{\frac{-1}{k}} = \left(A^{\frac{1}{k}} \right)^{-1}$$

5. On commence par examiner le cas où, par exemple, $B = I_n$ (on pourrait aussi envisager le cas où $A = I_n$). L'hypothèse $A \preceq I_n$ donne que toutes les valeurs propres de A sont dans $]0, 1[$ ($0 \notin \text{Sp}(A)$). Donc toutes les valeurs propres de A^{-1} sont dans $]1, +\infty[$ ce qui donne bien $I_n \preceq A^{-1}$.

Dans le cas général, soit $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $C^2 = B$. On a :

$$\begin{aligned} A \preceq B &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \leq {}^t (C X) (C X) \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t C^{-1} Y A (C^{-1} Y) \leq {}^t Y Y \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t Y (C^{-1} A C^{-1}) Y \leq {}^t Y Y \end{aligned}$$

On a donc $C^{-1} A C \preceq I_n$, on peut donc déduire du cas $B = I_n$ que $I_n \preceq C A^{-1} C$. Or

$$\begin{aligned} I_n \preceq C A^{-1} C &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t Y (C A^{-1} C) Y \geq {}^t Y Y \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t (C Y) A^{-1} (C Y) \geq {}^t Y Y \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A^{-1} X \geq {}^t (C^{-1} X) (C^{-1} X) \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A^{-1} X \geq {}^t X C^{-1} C^{-1} X \\ &\Leftrightarrow B^{-1} \preceq A^{-1} \end{aligned}$$

Partie II

1. Pour tout $X = \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j \in L = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, on a :

$$(X|AX) = \sum_{j=1}^p \lambda_{i_j} \alpha_j^2$$

Donc $\lambda_{i_p}(x|x) \leq (X|AX)$ avec égalité si $X = u_p$ et $\lambda_{i_1}(X|X) \geq (X|AX)$ avec égalité si $X = u_1$. Ceci est équivalent à

$$\min_{X \in L \setminus \{0\}} \frac{(X|AX)}{(X|X)} = \lambda_{i_p} \text{ et } \max_{X \in L \setminus \{0\}} \frac{(X|AX)}{(X|X)} = \lambda_{i_1}.$$

2. Comme précédemment, $\max_{X \in L \setminus \{0\}} \frac{(X|BX)}{(X|X)} = \mu_p$ et $\min_{X \in L' \setminus \{0\}} \frac{(X|AX)}{(X|X)} = \lambda_p$. D'autre part, $\dim(L \cap L') = \dim(L) + \dim(L') - \dim(L + L') = n + 1 - \dim(L + L') \geq 1$, donc $L \cap L' \neq \emptyset$. Soit donc Y un vecteur non nul de $L \cap L'$, alors

$$\min_{X \in L \setminus \{0\}} \frac{(X|AX)}{(X|X)} \leq \frac{(Y|AY)}{(Y|Y)} \leq \frac{(Y|BY)}{(Y|Y)} \leq \max_{X \in L' \setminus \{0\}} \frac{(X|BX)}{(X|X)}.$$

D'où $\lambda_p \leq \mu_p$ et ceci pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(B)$.

3. Considérons les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$, $\text{Sp}(B) = \{4, 1\}$ et $\text{Sp}(A - B) = \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$, on a bien $\text{Sp}(A) \leq \text{Sp}(B)$ ce pendant $A \not\leq B$, car $-1 + \sqrt{2} > 0$ et $-1 - \sqrt{2} < 0$.

4. Si $A \preceq CB^tC$, alors le résultat de la question 2. de cette partie montre que $\text{Sp}(A) \leq \text{Sp}(CB^tC) = \text{Sp}(CBC^{-1}) = \text{Sp}(B)$.

Réciproquement, supposons $\text{Sp}(A) \leq \text{Sp}(B)$. Considérons une base orthonormée $\mathcal{B}_A = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de vecteurs propres de A et $\mathcal{B}_B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres de B , et soit C la matrice qui transforme la base orthonormée $\mathcal{B}_B$ à la base orthonormée $\mathcal{B}_A$, C est donc orthogonal et $Cv_i = u_i$ pour tout

$i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ un vecteur décomposé dans la base $\mathcal{B}_A$, on a :

$$\begin{aligned} (X|(CB^tC - A)X) &= (X|(CB^tC)X) - (X|AX) \\ &= ({}^tCX|B({}^tCX)) - (X|AX) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^p (\mu_i - \lambda_i) x_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $A \preceq CB^tC$.

Partie III

1. Tant que nous sommes dans un espace dimension finie, il suffit de munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et a fortiori $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) de la norme

$$M \mapsto \|M\| = (\text{tr}({}^tMM))^{1/2}.$$

Si M est symétrique, le théorème spectral donne l'existence de P orthogonale et de D diagonale telles que

$$M = PD^tP = PDP^{-1}$$

et alors

$$\|M\|^2 = \text{tr}(M^2) = \text{tr}\left((PDP^{-1})^2\right) = \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \quad (1)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M , répétées autant de fois que leur multiplicité.

D'après la question 1 de la partie II, pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lambda_{\min} {}^tXX \leq {}^tXMX \leq \lambda_{\max} {}^tXX \quad (2).$$

où $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de M .

Supposons que E soit une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ minorée par $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et majorée par $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour tout $M \in E$,

$$\alpha {}^tXAX \leq {}^tXMX \leq \beta {}^tXBX.$$

où

$\alpha = \max(\text{Sp}(A))$ et $\beta = \min(\text{Sp}(B))$. Ainsi, si λ est une valeur propre de M et X un vecteur propre non nul associé, l'inégalité ci-dessus montre que $\text{Sp}(M) \subset [\alpha, \beta]$. Si $\gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$, on obtient

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M), \quad \lambda^2 \leq \gamma^2$$

Finalement, en tenant compte de la relation (1)

$$\forall M \in E, \quad \|M\| \leq \sqrt{n}\gamma$$

et E est bien borné.

Supposons réciproquement E bornée. Soit $R > 0$ tel que

$$\forall M \in E, \quad \|M\| \leq R.$$

Alors, par l'expression de la norme à l'aide des valeurs propres, on a

$$\forall M \in E, \quad \text{Sp}(M) \subset [-R, R]$$

et donc

$$\forall M \in E, \quad -RI_n \preceq M \preceq RI_n$$

ce qui conclut la réciproque.

2. Aoit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ croissante majorée pour $\preceq$. Elle est aussi minorée pour $\preceq$ (par A_0). Donc bornée par la question précédente. On est en dimension finie, on peut donc utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit donc une suite extraite convergente $(A_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Elle est croissante pour $\preceq$, et sa limite est $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une autre suite extraite convergente, B sa limite. Fixons $k \in \mathbb{N}$, à partir d'un certain rang p_0 , on a $\psi(p) \geq \varphi(k)$, donc

$$A_{\varphi(k)} \preceq A_{\psi(p)} \preceq B \quad (1)$$

donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXA_{\varphi(k)}X \leq {}^tXA_{\psi(p)}X$$

mais, par continuité de $M \mapsto {}^tXMX$ (linéaire en dimension finie), on a, pour toute $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} {}^tXA_{\psi(p)}X = {}^tXBX$$

et les inégalités larges (dans $\mathbb{R}$, bien sûr) passent à la limite quand q tend vers $+\infty$). En interprétant de nouveau l'inégalité (1) par

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXA_{\varphi(k)}X \leq {}^tXBX$$

qui est vraie sans restriction sur k et en utilisant la conservation des inégalités larges à la limite quand k tend vers $+\infty$, on obtient

$$A \preceq B$$

mais symétriquement $B \preceq A$ et donc par antisymétrie $B = A$. Ainsi la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence et donc converge.

