Devoir libre $n^\circ 08$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

problème I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série définissant R_n est une série alternée convergente, donc son signe et celui de son premier terme, et donc $(-1)^n R_n \geq 0$ et $|R_n| = (-1)^n R_n$. D'où :

$$|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^n (R_n - R_{n+1}) = a_n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
|R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n (R_n + R_{n+1}) && (1)\\
&= (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right) && (2)\\
&= (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+n} a_{n+p} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+n+1} a_{n+p+1} \right) && (3)\\
&= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (a_{n+p} - a_{n+p+1}) && (4)
\end{aligned}$$

La série $\sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p (a_{n+p} - a_{n+p+1})$ vérifie le critère spécial des séries alternées, car $(a_{n+p} - a_{n+p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant d'après les hypothèses (H_1) et (H_4). Sa somme est du signe du premier terme, donc positif. On en déduit que la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est donc convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = |R_n| + |R_{n+1}| \leq 2|R_n| \leq |R_{n-1}| + |R_n| = a_{n-1}$$

D'où

$$\frac{a_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{a_{n-1}}{2}.$$

4. D'après la question précdente et l'hypothèse (H_3), on a $a_n \sim a_{n-1}$, donc $|R_n| \sim \dfrac{a_n}{2}$. Donc $R_n \sim \dfrac{u_n}{2}$.

5. **Applications :**

(a) Posons $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) sont donc bien vérifiées. Comme f est convexe, alors $f(n+1) \leq \dfrac{1}{2}(f(n) + f(n+2))$, ce qui montre que (H_4) est aussi vraie. Ainsi, tout ce précède s'applique, et donc :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sim \frac{(-1)^{n-1}}{2n}.$$

On a vue en 2), que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge. Calculons sa somme, pour cela calculons la limite de sa somme partielle :
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
S_m &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} && (5)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\ldots+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} && (6)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\ldots+\sum_{k=m-1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\sum_{k=m}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+m\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} && (7)\\
&= 1-1+1-1+\ldots+(-1)^{m-1}+mR_{m+1} && (8)
\end{aligned}$$

Si on prend $m=2p$, alors $S_{2p}=2pR_{2p+1}\sim\dfrac{(1-)^{2p}2p}{2(2p+1)}=\dfrac{2p}{4p+2}$ qui tend vers $\dfrac{1}{2}$. D'où l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\lim_{p\to\infty}S_{2p}=\frac{1}{2}.$$

(b) On pose $a_n=f(n)$ avec $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$. Donc toutes les hypothèses sont bien vérifiées, et donc on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\sim\frac{(-1)^n}{2(2n+1)}.$$

Pour le calcul de la somme voir deuxième méthode.

(c) Avec $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, on voit que les hypothèses sont bien vérifiées. Donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\sim\frac{(-1)^{n-1}}{2n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ converge. Calculons sa somme. Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
S_m &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} && (9)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}+\ldots+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} && (10)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}+\ldots+\sum_{k=m-1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}+\sum_{k=m}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}+m\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} && (11)\\
&= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{m}+mR_{m+1} && (12)
\end{aligned}$$

Or $mR_{m+1}\sim(-1)^{m-1}\dfrac{m}{2m^2}$, donc $\displaystyle\lim_{m\to\infty}mR_{m+1}=0$. D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\lim_{m\to\infty}S_m=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{n}=\ln(2).$$

(d) On prend $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ pour $x>0$. $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ et $f''(x)=\dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$, donc f décroit sur $[e,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, et convexe sur $[e^{\frac{3}{2}},+\infty[$. Tout ce qui précède s'applique et donc

$$\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}\sim(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{2n}.$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k=n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}$ converge. Calculons sa somme partielle, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
S_m &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} && (13)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}+\ldots+\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} && (14)\\
&= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}+\ldots+\sum_{k=m}^{m}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}+m\sum_{k=m+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} && (15)\\
&= \ln(1)-\ln(2)+\ln(3)+\ldots+(-1)^{m-1}\ln(m)+mR_{m+1} && (16)
\end{aligned}$$

Pour $m=2p$, il vient :

$$S_{2p}=\ln\frac{1.3....(2p-1)}{2.4....(2p)}+2pR_{2p+1}=\ln\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}+2pR_{2p+1}.$$

Or par la formule de Stirling, on a :

$$\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}=\frac{1+o(1)}{\sqrt{\pi m}}$$

D'autre part,

$$\frac{\ln(n)}{2}\leq|R_n|\leq\frac{\ln(n-1)}{2(n-1)}$$

implique $|R_n|=\frac{\ln(n)}{2n}+O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$, donc $2pR_{2p+1}=\frac{\ln(2p)}{2}+0(1)$. Donc

$$S_{2p}=-\frac{\ln(\pi m)}{2}+\frac{\ln(2p)}{2}+o(1)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)+o(1).$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

6. Autre méthode :

(a) Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=n}^{N}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\left(\sum_{k=n}^{N}(-t)^{k-1}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\frac{(-t)^{n-1}(1-(-t)^{N-n+1})}{1+t}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\frac{(-t)^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{(-t)^{N}}{1+t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or $\left|\int_0^1\frac{(-t)^N}{1+t}\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 t^N\mathrm{d}t=\frac{1}{N+1}$. D'où $R_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} R_n &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t && (17)\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\sum_{n=1}^{N}(-t)^{n-1}\mathrm{d}t && (18)\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\frac{1-(-t)^N}{1+t}\mathrm{d}t && (19)\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} - \int_0^1 \frac{(-t)^N}{(1+t)^2}\mathrm{d}t && (20)
\end{aligned}$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^N}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^N \mathrm{d}t = \frac{1}{N+1}$$

Ceci montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} R_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=n}^{N}(-1)^k\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{N}(-t^2)^k\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{(-t^2)^n(1-(-t^2)^{N-n+1})}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t^2)^{N+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or $\left|\int_0^1 \frac{(-t^2)^N}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^{2N+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2N+3}$. D'où $R_n = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} R_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\sum_{n=0}^{N}(-t^2)^n\mathrm{d}t && (21)\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t && (22)\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} - \int_0^1 \frac{(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t && (23)
\end{aligned}$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^{2N+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2N+3}$$

Ceci montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} R_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$

Calcul de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$:
À l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} && (24)\\
&= \frac{1}{2}+2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-2I && (25)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}-2I && (26)
\end{aligned}$$

D'où $I=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{8}$ et par conséquent $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

(c) Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} &= \sum_{k=n}^{N}(-1)^{k-1}\int_0^{+\infty} te^{-kt}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\left(-t\sum_{k=n}^{N}\left(-e^{-t}\right)^k\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{-t\left(-e^{-t}\right)^n\left(1-\left(-e^{-t}\right)^{N-n+1}\right)}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{-t(-e^{-t})^n}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{t(-e^{-t})^{N+1}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t(-e^{-t})^{N+1}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t\right|\leq\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-(N+1)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{(N+1)^2}$. D'où

$$R_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=(-1)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tn}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}R_n &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tn}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t && (27)\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{1+e^{-t}}\sum_{n=1}^{N}(-e^{-t})^{n-1}\mathrm{d}t && (28)\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{1+e^{-t}}\frac{1-(e^{-t})^N}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t && (29)\\
&= \int_0^{1}\frac{te^{-t}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{(-t)^N}{(1+t)^2}\mathrm{d}t && (30)
\end{aligned}$$

et

$$\left|\int_0^1\frac{(-t)^N}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 t^N\mathrm{d}t=\frac{1}{N+1}.$$

Ceci montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}R_n$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}R_n=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\mathrm{d}t=\ln(2).$$

Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\mathrm{d}t &= -\int_0^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\right)\mathrm{d}u && (31)\\
&\overset{\text{I.P.P}}{=} \left[\frac{-te^{-t}}{1+e^{-t}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t && (32)\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t && (33)\\
&\overset{u=e^{-t}}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} && (34)\\
&= \ln(2) && (35)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Problème I

-1-

1. (a) On peut vérifier facilement, que pour tout $c>0$, l'application $N : A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq p} \mapsto c \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ est une norme sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
D'autre part, pour toute norme N sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, l'application bilinéaire $(A,B)\mapsto AB$ étant continue (on est en dimension finie), on est assuré de l'existence d'une constante $k>0$ telle que

$$\forall A,B\in\mathscr{M}_p(K) \quad N(AB)\leq kN(A)N(B).$$

Par suite, la norme kN est sous-multiplicative. Toute norme sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est donc proportionnelle à une norme d'algèbre.

(b) Puisque on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et donc la notion de convergence ne dépend pas de la norme choisie.

2. f admet au moins une valeur propre λ. Soit $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à λ. g commute avec f et donc laisse stable $E_\lambda(f)$. La restriction de g à $E_\lambda(f)$ est un endomorphisme de $E_\lambda(f)$ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à f et g. Comme f et g ont des rôles identiques, on montre de même que tout vecteur propre de g est un vecteur propre de f.

3. (a) Voir cours de réduction.

(b) Soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de f, donc $E=E_{\lambda_1}(f)\oplus E_{\lambda_2}(f)\oplus\ldots\oplus E_{\lambda_p}(f)$.
D'après la question **2.**, les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(f)$, $1\leq i\leq p$, sont stables par g, or la restriction à un sous-espace vectoriel stable d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Donc dans chaque $E_{\lambda_i}(f)$, $1\leq i\leq p$, il existe une base de vecteurs propres pour la restriction de g à ce sous-espace, ces vecteurs propres sont donc aussi des vecteurs propres de g, mais ce sont des vecteurs propres de f d'après la définition de $E_{\lambda_i}(f)$.
Comme E est somme directe des $E_{\lambda_i}(f)$, $1\leq i\leq p$, la réunion de ces bases de $E_{\lambda_i}(f)$ est une base de E, c'est une base commune de vecteurs propres de f et g.
Matriciellement ceci est équivalent à l'existence d'une matrice inversible P (les colonnes de P sont représentées par les vecteurs propres communs) telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

(c) **Existence :** Soit P une inversible telle que $A=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)P^{-1}$. Comme les λ_i, $1\leq i\leq p$, sont positifs, alors $A=B^2$ où

$$B=P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_p}\right)P^{-1}.$$

Il est clair que $B \in \omega_p$.
Unicité : Supposons qu'il existe une matrice $B' \in \omega_p$ telle que $B'^2 = A$. Considérons Q un polynôme vérifiant, pour $1 \leq i \leq p$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (polynôme d'interpolation de Lagrange par exemple). Ainsi

$$Q(A) = PQ(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p))P^{-1} = P\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_p}\right)P^{-1} = B.$$

Par ailleurs, comme $B'^2 = A$ alors B' et A commutent. Par conséquent, B' commute avec tout polynôme en A et commute donc avec B. Les matrices B et B' étant dans ω_p et commutant, elles sont donc diagonalisables dans la même base de vecteurs propres. Ainsi, il existe ainsi $R \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, D_1, D_2 diagonales tels que $R^{-1}BR = D_1$ et $R^{-1}B'R = D_2$. Or

$$D_1^2 = R^{-1}B^2R = R^{-1}AR = R^{-1}B'^2R = D_2^2.$$

Les matrices D_1 et D_2 étant diagonales à coefficients positifs, on en déduit que $D_1 = D_2$. Ainsi $B' = B$.

-2-

1. $A^n = DD^nP^{-1}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kA^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} a_kD^k\right)P^{-1}$.
2. Les deux suites sont des suites de sommes partielles, associées à des séries convergentes, donc elles convergent.
3. Posons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, alors

$$S_n(A) = P\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_1^{2k+1}}{(2k+1)!}, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_2^{2k+1}}{(2k+1)!}, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_3^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)P^{-1}$$

et

$$C_n(A) = P\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_1^{2k}}{(2k)!}, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_2^{2k}}{(2k)!}, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_3^{2k}}{(2k)!}\right)P^{-1}$$

Ainsi

$$[S_n(A)]^2 = P\operatorname{diag}\left(\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_1^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]^2, \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_2^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]^2, \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\lambda_3^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]^2\right)P^{-1}$$

D'où par passage à la limite et argument de continuité, on obtient :

$$[\sin(A)]^2 = \lim_{n\to\infty}[S_n(A)]^2 = P\operatorname{diag}\left(\sin^2(\lambda_1), \sin^2(\lambda_2), \sin^2(\lambda_3)\right)P^{-1}.$$

De même, on a :

$$[\cos(A)]^2 = \lim_{n\to\infty}[C_n(A)]^2 = P\operatorname{diag}\left(\cos^2(\lambda_1), \cos^2(\lambda_2), \cos^2(\lambda_3)\right)P^{-1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
[\sin(A)]^2 + [\cos(A)]^2 &= P\operatorname{diag}\left(\sin^2(\lambda_1), \sin^2(\lambda_2), \sin^2(\lambda_3)\right)P^{-1} \\
&\quad + P\operatorname{diag}\left(\cos^2(\lambda_1), \cos^2(\lambda_2), \cos^2(\lambda_3)\right)P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} \sin^2(\lambda_1)+\cos^2(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(\lambda_2)+\cos^2(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\lambda_3)+\cos^2(\lambda_3) \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= PIP^{-1} \\
&= I.
\end{aligned}$$

4. On trouve $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ et $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$.

•••••••••