

Devoir libre n°07

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••

Première partie : Calcul approché de la constante d'Euler

1. (a) On a $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

D'autre part $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$. Ce qui prouve que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Enfin $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$. Ce qui prouve maintenant que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Ces deux suites sont donc adjacentes de limite γ . D'où l'existence de γ .

- (b) On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq 2$ $v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{10}$. Donc pour avoir une valeur approchée à 10^{-1} près, il suffit $|u_n - v_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$, il suffit donc d'avoir $n \geq 10$. v_{10}, u_{10} constitue donc un encadrement de 2 valeurs approchées de γ à $\frac{1}{10}$ près.

$$\gamma \simeq 0,5.$$

2. (a) Sur l'intervalle $[k, k+1]$, la fonction g est de la forme : $g(t) = at + b$ avec :

$$\begin{cases} g(k) = ak + b = \frac{1}{k} \\ g(k+1) = a(k+1) + b = \frac{1}{k+1} \end{cases}.$$

$$\text{D'où } a = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \text{ et } b = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}.$$

De même, sur l'intervalle $[k, k+1]$, la fonction h est de la forme :

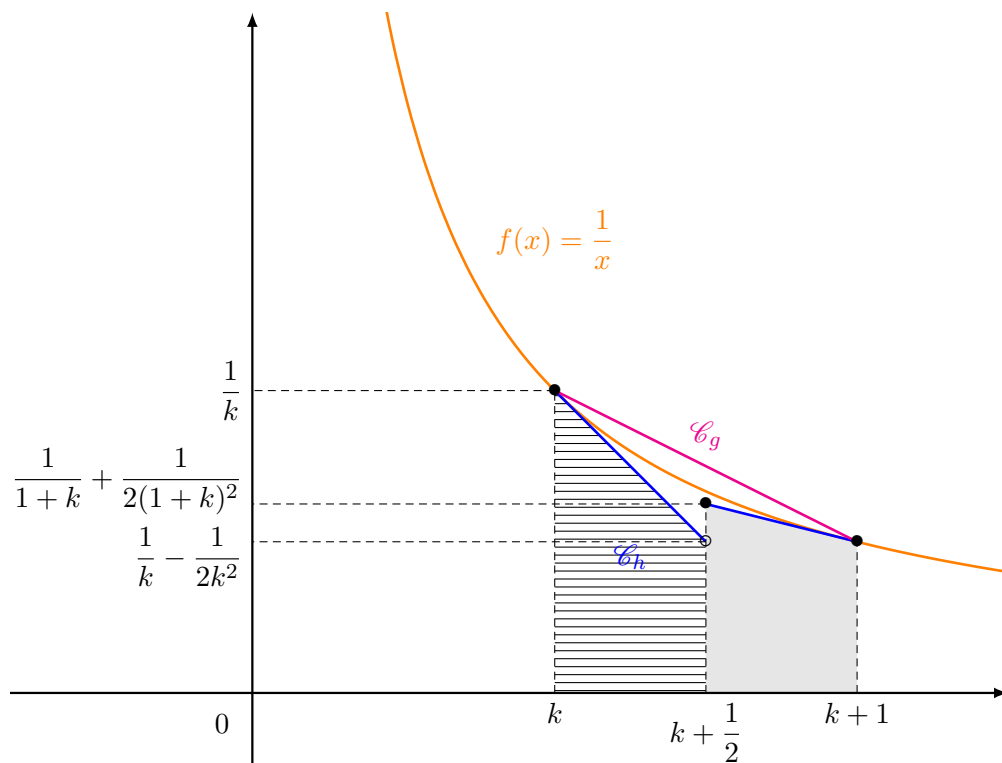
$$\begin{cases} h(t) = a_1 t + b_1 & \text{si } t \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right[\\ h(t) = a_2 t + b_2 & \text{si } t \in \left[k + \frac{1}{2}, k+1\right] \end{cases}$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} a_1 = h'(k) = f'(k) = -\frac{1}{k^2} \\ a_2 = h'(k+1) = f'(k+1) = -\frac{1}{(k+1)^2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} h(k) = a_1 k + b_1 = \frac{1}{k} \\ h(k+1) = a_2(k+1) + b_2 = \frac{1}{k+1} \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{cases} b_1 = \frac{2}{k} \\ b_2 = \frac{2}{k+1} \end{cases}.$$



f est convexe car de dérivée seconde positive. g a pour courbe représentative la corde de la courbe représentative de f et h a pour courbe représentative deux tangentes à celle de f . La corde est au dessus d'une courbe convexe et les tangentes en dessous. D'où les inégalités :

$$\forall t \in [k, k+1], h(t) \leq f(t) \leq g(t).$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} h(t) dt &= \int_k^{k+\frac{1}{2}} (a_1 t + b_1) dt + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} (a_2 t + b_2) dt \\ &= \frac{a_1}{2} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right] + \frac{b_1}{2} + \frac{a_2}{2} \left[(k+1)^2 - \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{b_2}{2} \\ &= -\frac{1}{2k^2} \left(k + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2(k+1)^2} \left(k + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{8} k^2 + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2}. \end{aligned}$$

et

$$\int_k^{k+1} g(t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right).$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} h(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} g(t) dt$$

ou encore

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leq \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}.$$

On retranche $\frac{1}{k+1}$ de chacun des membres de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}.$$

On somme de $k = n+1$ à $n+p$, puis en fait tendre p vers l'infini pour obtenir :

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}.$$

(b) L'inégalité précédente s'écrit encore :

$$-\frac{1}{8n^2} \leq \left(u_n - \frac{1}{2n}\right) - \gamma \leq 0.$$

Quand $\frac{1}{8n^2} \leq 10^{-3}$, c'est à dire dès que $n^2 \geq 125$ ou encore $n \geq 12$, on a $u_n - \frac{1}{2n}$ qui est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. On choisit donc $u_{12} - \frac{1}{24}$, ce qui donne :

$$\gamma \simeq 0,576$$

(c) Tout d'abord, on a le développement limité :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} + \frac{1}{5k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right).$$

Ensuite, on a aussi :

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4}\right) + o\left(\frac{1}{k^4}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} - \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 = \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^4} - \frac{4}{k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

et

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)^4 = \frac{1}{k^4} - \frac{4}{k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

Donc

$$\frac{1}{k^4} - \left(\frac{1}{k+1}\right)^4 = \frac{4}{k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right).$$

D'après ce qui précède, on a évidemment $a = \frac{1}{2}$ et alors :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{6k^3} + \frac{1}{4k^4} - \frac{3}{10k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

et puisque

$$\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} = -\frac{2}{k^3} + \frac{3}{k^4} - \frac{4}{k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

on doit avoir $b = -\frac{1}{12}$, ce qui donne :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{30k^5} + o\left(\frac{1}{k^5}\right) = \frac{1}{120} \left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right) + o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

Ainsi donc, avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{12}$ et $c = \frac{1}{120}$, on obtient bien :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{120} \left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right).$$

(d) On sait que $u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} \left[\ln \left(\frac{k+1}{k} \right) - \frac{1}{k+1} \right]$, donc par somme et télescopage, on obtient :

$$u_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{120n^4}.$$

3. (a) $\ker(\Phi)$ est t clairement constitué des polynômes constants $\mathbb{Q}_0[X]$. En effet, $Q \in \ker(\Phi)$ si et seulement si, $Q(X+1) = Q(X)$, Q est 1-périodique, Q est donc constant.

Comme $\deg(\Phi(P)) = \deg(P) - 1$ dès que P n'est pas constant, On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'image de la restriction Φ_n de Φ à $\mathbb{Q}_n[X]$ est incluse dans $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$. Or, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{Q}_n[X]) = \dim(\ker(\Phi_n)) + \dim(\text{Im}(\Phi_n)).$$

Donc $\text{Im}(\Phi_n)$ est donc de dimension n et $\text{Im}(\Phi_n) = \mathbb{Q}_{n-1}[X]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{Q}[X]$.

(b) D'après ce qui précède, Φ est surjective donc l'existence est démontrée. Considérons deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que :

$$\Phi(Q_1) = \Phi(Q_2) = X^p \text{ et } Q_1(0) = Q_2(0) = 0.$$

On a alors $\Phi(Q_1 - Q_2) = 0$ et donc $(Q_1 - Q_2) \in \ker(\Phi) = \mathbb{Q}_0[X]$, c'est-à-dire que le polynôme $Q_1 - Q_2$ est constant. Or $(Q_1 - Q_2)(0) = 0$, donc cette constante est nulle, et ainsi $Q_1 = Q_2$, et l'unicité est démontrée.

(c) On a l'identité $Q_p(X+1) - Q_p(X) = X^p$. Par dérivation, on obtient :

$$Q'_p(X+1) - Q'_p(X) = pX^{p-1}.$$

Soit $\Phi(Q'_p) = pX^{p-1}$. Par définition, on a aussi : $\Phi(Q_{p-1}) = X^{p-1}$ d'où : $\Phi(Q'_p) = \Phi(pQ_{p-1})$. Comme précédemment, cela signifie que $Q'_p - pQ_{p-1}$ appartient à $\ker(\Phi)$, c'est-à-dire que c'est un polynôme constant, égal à $(Q'_p - pQ_{p-1})(0) = Q'_p(0)$.

D'où : $Q'_p - Q'_p(0) = pQ_{p-1}$.

(d) On a $Q'_p(X) - Q'_p(0) = pQ_{p-1}(X)$, donc par intégration :

$$Q_p(X) - XQ'_p(0) = \int_0^X pQ_{p-1}(t) dt.$$

Il nous reste donc une constante à calculer. On a déjà utilisé $Q_p(0) = 0$, de plus, pour p non nul, $Q_p(1) = 0$. On obtient :

$$-Q'_p(0) = \int_0^1 pQ_{p-1}(t) dt$$

et donc :

$$(*) \quad Q_p(X) = \int_0^X pQ_{p-1}(t) dt - X \int_0^1 pQ_{p-1}(t) dt,$$

ceci pour p non nul.

De manière évidente $Q_0(X) = X$. La formule (*) permet de calculer de proche en proche les polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On trouve :

$$\begin{aligned} Q_0(X) &= X, \\ Q_1(X) &= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X, \\ Q_2(X) &= \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X, \\ Q_3(X) &= \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2, \\ Q_4(X) &= \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X, \\ Q_5(X) &= \frac{1}{6}X^6 - \frac{1}{2}X^5 + \frac{5}{12}X^4 - \frac{1}{12}X^2. \end{aligned}$$

(e) On a $Q'_5(0) = 0$ et donc $Q'_5(X) = 5Q_4(X)$, $Q'_5(X)$ est donc du signe de $Q_4(X)$ qu'on factorise :

$$\begin{aligned} Q_4(X) &= \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X \\ &= \frac{X(X-1)(2X-1)(3X^2-3X-1)}{30} \end{aligned}$$

$(3X^2 - 3X - 1)$ n'a pas de racine entre 0 et 1. Ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$Q'_5(x)$	0	-	0
$Q_5(x)$	0	$-\frac{1}{128}$	0

Donc $M_5 = 0$ et $m_5 = -\frac{1}{128}$.

4. (a) On cherche une relation de récurrence :

$$\begin{aligned} I_p(k) &= \int_0^1 \frac{pQ_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{Q'_p(t) - Q'_p(0)}{(t+k)^{p+1}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{Q'_p(t)}{(t+k)^{p+1}} dt - Q'_p(0) \left[-\frac{1}{p} \frac{1}{(t+k)^p} \right]_0^1 \\ &= \underbrace{\left[\frac{Q_p(t)}{(t+k)^{p+1}} \right]_0^1}_{=0} + (p+1) \int_0^1 \frac{Q_p(t)}{(t+k)^{p+2}} dt - Q'_p(0) \left[-\frac{1}{p} \frac{1}{(t+k)^p} \right]_0^1 \\ &= I_{p+1}(k) + \frac{Q'_p(0)}{p} \left(\frac{1}{(1+k)^p} - \frac{1}{k^p} \right) \end{aligned}$$

Ou encore :

$$I_{p+1}(k) = I_p(k) - \frac{Q'_p(0)}{p} \left(\frac{1}{(1+k)^p} - \frac{1}{k^p} \right)$$

(b) D'une part, on a :

$$I_1(k) = \int_0^1 \frac{Q_0(t)}{(t+k)^2} dt = \int_0^1 \frac{t}{(t+k)^2} dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{t+k} - \frac{k}{(t+k)^2} \right] dt = \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) - \frac{1}{k+1}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} I_6(k) &= I_1(k) - \frac{Q'_5(0)}{5} \left(\frac{1}{(1+k)^5} - \frac{1}{k^5} \right) - \frac{Q'_4(0)}{4} \left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4} \right) \\ &\quad - \frac{Q'_3(0)}{3} \left(\frac{1}{(1+k)^3} - \frac{1}{k^3} \right) - \frac{Q'_2(0)}{2} \left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2} \right) - \frac{Q'_1(0)}{1} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k} \right) \\ &= I_1(k) - \frac{1}{120} \left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{120} \left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

D'après le résultat de la question 3e., on a $-\frac{1}{128} \leq Q_5(X) \leq 0$, donc $-\frac{1}{128} \int_0^1 \frac{6}{(t+k)^7} dt \leq I_6(k) \leq 0$, et par conséquent :

$$-\frac{1}{128} \left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(1+k)^6} \right) \leq I_6(k) \leq 0.$$

(c) D'après l'égalité de la question 2a., on a :

$$\begin{aligned} u_n - \gamma &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} I_1(k-1) = \sum_{k=n}^{+\infty} I_1(k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) - \frac{1}{120} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

En effet, toutes ces séries convergent et pour les séries de différences, on a facilement leur somme en prenant la limite des sommes partielles. On a donc :

$$u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{2n}$$

D'après la question précédente, on a $-\frac{1}{128} \left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(1+k)^6} \right) \leq I_6(k) \leq 0$. Par télescopage, on a donc :

$$-\frac{1}{128n^6} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) \leq 0,$$

ce qui nous donne :

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{128n^6} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4}$$

(d) L'inégalité précédente s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{128n^6} \leq u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} - \gamma \leq 0$$

Il suffit donc d'avoir $\frac{1}{128n^6} \leq 10^{-10}$, c'est à dire $n \geq \left(\frac{10^{10}}{128} \right)^{1/6}$, $n = 21$ convient. La valeur approchée cherchée est donc :

$$\begin{aligned} \gamma &\simeq u_{21} - \frac{1}{120 \times 21^4} + \frac{1}{12 \times 21^2} - \frac{1}{2 \times 21} \\ &\simeq 0,5772156648 \end{aligned}$$

Deuxième partie : Utilisation de γ pour calculer certains intégrales généralisées

-A-

1. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt$ est généralisée en 1 mais on verra que la fonction sous signe intégrale a une limite finie en 1 et donc l'intégrale converge. En effet $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t^n}{1-t} = \lim_{t \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{n-1} t^i = n$, on remplace donc $\frac{1-t^n}{1-t}$ par $\sum_{i=0}^{n-1} t^i$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 t^i dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Utilisons le changement de variable $t = 1 - \frac{y}{n}$ dans l'égalité précédente, on obtient :

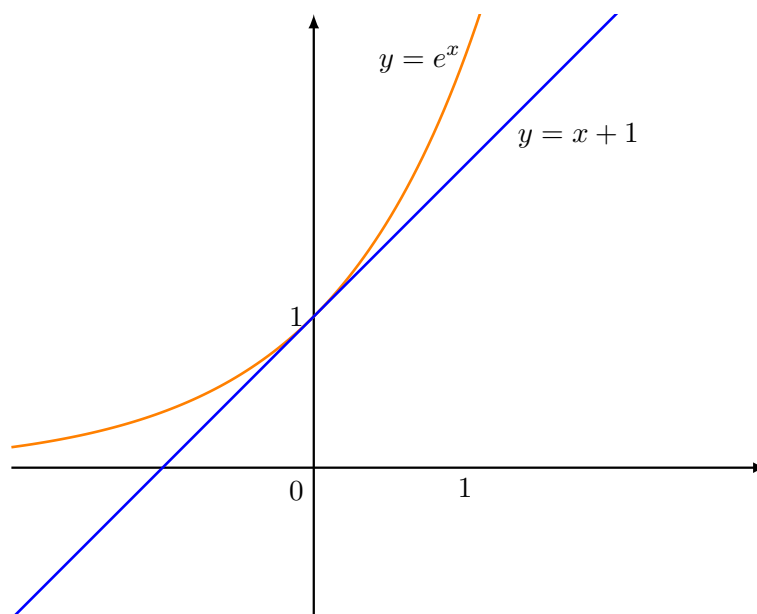
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &= \int_n^0 \frac{1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)} d\left(1 - \frac{y}{n}\right) \\ &= \int_0^n \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

2. On a $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^n \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y} - \ln(n) \\ &= \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y} + \int_1^n \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y} - \ln(n) \\ &= \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y} - \int_1^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \frac{dy}{y} + \int_1^n \frac{dy}{y} - \ln(n) \\ &= \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y} - \int_1^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

3. (a) La courbe représentative de la fonction exponentielle est convexe, donc elle est au dessus de sa tangente au point $(0, 1)$ d'équation $y = 1 + x$. Ceci montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$$



- (b) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente, respectivement, avec $x = \frac{t}{n}$ et $x = -\frac{t}{n}$.
- (c) Considérons la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(u) = (1-u)^n - 1 + nu$, on a $f'(u) = n(1 - (1-u)^{n-1}) \geq 0$ pour $u \in [0, 1]$. Comme $f(0) = 0$:

$$\forall u \in [0, 1] \quad (1-u)^n - 1 + nu \geq 0$$

En remplaçant u par $\frac{x^2}{n^2}$ qui est dans $[0, 1]$ pour $t \in [0, n]$, on obtient l'inégalité demandée.

- (d) L'inégalité de gauche n'est autre que la deuxième inégalité de la question 3.b. On réécrit l'inégalité de la question 3.c :

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$$

Utilisons maintenant la première inégalité de la question 3.b, on a :

$$e^y \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \geq e^y \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \geq 1 - \frac{y^2}{n}.$$

D'où $\left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \geq e^{-y} - \frac{y^2}{n}e^{-y}$ ou encore :

$$\frac{y^2}{n}e^{-y} \geq e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n.$$

Ce qui est la deuxième inégalité.

4. Le problème de convergence de l'intégrale est en $+\infty$. La fonction est positive et pour $x \geq 1$, on a $\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ dont l'intégrale converge par limite finie d'une primitive. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ converge.

On a

$$u_n = \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{dx}{x} - \int_1^n \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{dx}{x}$$

et

$$e^{-x} - \frac{x^2}{n}e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$

Ce qui donne

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right] \leq \frac{1}{x} \left[1 - e^{-x} - \frac{x^2 e^{-x}}{n}\right].$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx &\leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x} + \frac{x^2}{n}e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x} - \frac{x^2}{n}e^{-x}}{x} dx \\ \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx &\leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx + \frac{1}{n} \int_0^n x e^{-x} dx \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ converge, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n x e^{-x} dx = 0$. On passe à la limite dans les inégalités précédentes. Ces limites existent bien et par application du théorème des gendarmes :

$$\gamma = \int_0^1 (1 - e^{-y}) \frac{dy}{y} - \int_1^{+\infty} e^{-y} \frac{dy}{y}.$$

-B-

1. On va faire un développement limité de $g : x \mapsto \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}$ à partir d'un développement limité à l'ordre 2 de e^{-x} au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ceci prouve que g est prolongeable par continuité en 0 par $\frac{1}{2}$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, ce qui prouve que Φ est bornée au voisinage de 0 et de $+\infty$, et comme elle est continue sur $]0, +\infty[$, elle y est bornée. Ainsi il existe $M > 0$ tel que, $\forall x \in]0, +\infty[$, $|e^{-x}g(x)| \leq Me^{-x}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge. Ceci prouve que $\int_0^{+\infty} e^{-x}g(x)dx$ converge absolument donc converge.

2. Posons $\varphi_n(x) = \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}$ pour $x \in]0, +\infty[$. φ est continue sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 puisque,

$$\frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} = \frac{1 - x - 1 + nx + o(x)}{x} = n - 1 + o(1)$$

De plus $\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ converge.

3. L'intégrale $I_n(a)$ converge puisque $0 \leq \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \leq \frac{e^{-x}}{a}$. De plus, on peut diviser cette intégrale en deux intégrales convergentes par le même type de majoration :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x} dx$$

On fait le changement de variable $nx = u$ dans la deuxième intégrale par ailleurs convergente. On a donc :

$$\begin{aligned} I_n(a) &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{na}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= \int_a^{na} \frac{1 - (1 - e^{-x})}{x} dx \\ &= \int_a^{na} \frac{dx}{x} - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \\ &= \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \quad (*) \\ &= \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x} dx. \end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$$

par définition d'une intégrale convergente.

4. Soit F une primitive de $f : x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$, F a bien une limite finie en 0 puisque son intégrale converge. D'après l'égalité (*) on a :

$$I_n(a) = \ln(n) - \int_a^{n\alpha} f(x) dx = \ln(n) - F(na) + F(a)$$

On passe à la limite quand a tend vers 0 et :

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln(n)$$

5.

$$\begin{aligned} v_n &= S_{n-1} - \ln(n) \\ &= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx \\ &= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \left[\frac{1}{1 - e^{-x}} - g(x) \right] dx \\ &= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} dx + \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) g(x) dx \end{aligned}$$

Utilisons le changement de variables $u = e^{-x}$ dans la première intégrale qui est bien convergente.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} dx = - \int_1^0 \frac{1 - u^{n-1}}{1 - u} du = S_{n-1}$$

en utilisant le II.A). Il ne reste qu'à conclure :

$$v_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) g(x) dx$$

6. On casse encore la dernière intégrale obtenue en deux intégrales convergentes.

$$v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-nx} g(x) dx$$

Mais $|e^{-nx} g(x)| \leq M e^{-nx}$, et $\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$, d'où $\left| \int_0^{+\infty} e^{-nx} g(x) dx \right| \leq \frac{M}{n}$.

Ceci prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} g(x) dx = 0$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma$, on a aussi :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx$$

• • • • •