Devoir libre $n^\circ 05$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●●

Exercice I

1. Soit V un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ. Posons $W = AV$, donc on a :
$$MW = M(AV) = A(MV) = A(\lambda V) = \lambda AV = \lambda W$$
Donc $W \in E_\lambda(M)$. Comme $\dim(E_\lambda(M)) = 1$ (les valeurs propres sont simples), alors $E_\lambda(M) = \mathrm{Vect}(V)$, et donc il existe μ_λ tel que $AV = \mu_\lambda V$. Ainsi tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A.
2. Supposons $\mathrm{Sp}(M) = \{ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \}$. Considérons une base $(V_1, V_2, ..., V_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de vecteurs propres de M, donc $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \ MV_k = \lambda_k V_k$.
D'après **1.**, il existe des scalaires $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ tels que $AV_k = \mu_k V_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$. Soit P le polynome d'interpolation de Lagrange vérifiant :
$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \ P(\lambda_k) = \mu_k.$$
On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$,
$$P(M)V_k = P(\lambda_k)V_k = \mu_k V_k = AV_k,$$
ce qui montre que $A = P(M)$ puisque $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
3. On trouve par des calculs directs que $\chi_A(X) = X(X-1)(X-16)$. Si X vérifie $X^2 = A$, alors $XA = AX$, donc d'après ce qui précède il existe un polynôme P tel que $X = P(A)$ et dans ce cas $P(0)$, $P(1)$ et $P(16)$ seront de valeurs propres de X. Comme $X^2 = A$, alors $P(0)^2 = 0$, $P(1)^2 = 1$ et $P(16)^2 = 16$. Donc il existe des scalaires $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de $\{1, -1\}$ tels que $P(0) = 0$, $P(1) = \varepsilon_1$ et $P(16) = 4\varepsilon_2$. Comme $\deg(P) \leq 2$, on déduit de ce qui précède que
$$P(X) = \frac{\varepsilon_2}{60}X(X-1) - \frac{\varepsilon_1}{15}X(X-16)$$
En remarquant que le polynôme $R(X) = P^2(X) - X$ est divisible par χ_A, donc $R(A) = 0$, c'est-à-dire $P(A)^2 = A$. D'où :
$$X^2 = A \Leftrightarrow X \in \left\{ \frac{\varepsilon_2}{60}A(A-I) - \frac{\varepsilon_1}{15}A(A-16I) \;\middle|\; (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2 \right\}$$
D'où l'ensemble de solutions de l'équation $X^2 = A$:
$$\left\{ \frac{2\varepsilon_1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_2}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2 \right\}$$

Exercice II

1. Supposons que λ est une valeur propre de A et soit $X = {}^t(x_1, x_2, ..., x_n)$ un vecteur propre associé. L'égalité $AX = \lambda X$ est équivalente à
$$\forall j \in \mathbb{N}_n,\ \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (\lambda + a_j)x_j$$
Si $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et comme $X \neq 0$, alors il existe $j \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_j \neq 0$ et donc $\lambda + a_j = 0$, ceci montre que $x_k = 0$ pour tout $l \neq j$, dans ce cas $s = a_k x_k \neq 0$ ce qui est absurde. Donc nécessairement $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \neq 0$. Ainsi, $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $\lambda + a_j \neq 0$, d'où :
$$X = s^t\left(\frac{1}{\lambda + a_1}, \frac{1}{\lambda + a_2}, ..., \frac{1}{\lambda + a_n}\right)$$

D'après la définition de s, on déduit :

$$s=\sum_{i=1}^{n}\frac{sa_i}{\lambda+a_i}=s\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda+a_i}$$

Comme $s\neq 0$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda+a_i}=1$.

Inversement, on peut vérifier que si λ vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda+a_i}=1$, le vecteur ${}^t\left(\frac{1}{\lambda+a_1},\frac{1}{\lambda+a_2},\dots,\frac{1}{\lambda+a_n}\right)$ est un vecteur propre de A et $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$.

2. Considérons la fonction $x\mapsto\varphi(x)=-1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x+a_i}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-a_1,-a_2,\dots,-a_n\}$. Il est clair que φ est décroissante sur chaque sous-intervalle de domaine de définition, de plus :

$$\forall k\in\mathbb{N}_n,\quad \lim_{x\to -a_k^+}\varphi(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to -a_k^-}\varphi(x)=-\infty$$

et $\displaystyle\lim_{x\to\pm}\varphi(x)=1$.

Donc φ change de signe sur les intervalles $(]-a_k,-a_{k-1}[)_{(1<k\leq n)}$ et aussi sur l'intervalle $]-a_1,+\infty[$. Donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet n racines distinctes (d'après le théorème de valeurs intermédiaires) et dons $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(A))=n$ et par conséquent A est diagonalisable.

Exercice III

1. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{P'(X)}{P(X)} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_i} && (1)\\
&= \frac{1}{X}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{\lambda_i}{X}}\quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique)} && (2)\\
&= \frac{1}{X}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{X}\right)^k+\frac{\left(\frac{\lambda_i}{X}\right)^{n+1}}{1-\frac{\lambda_i}{X}}\right] && (3)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{S_k}{X^{k+1}}+\frac{1}{X^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{n+1}}{X-\lambda_i} && (4)
\end{aligned}$$

2. L'égalité précédente s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned}
P'(X) &= \frac{P(X)}{X^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}S_kX^{n-k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{n+1}\frac{P(X)}{X^{n+1}(X-\lambda_i)}\\
&= \frac{P(X)}{X^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}S_{n-k}X^{k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{n+1}\frac{P(X)}{X^{n+1}(X-\lambda_i)}
\end{aligned}$$

La fraction $\dfrac{P(X)}{X^{n+1}(X-\lambda_i)}$ étant de degré -2, ainsi au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \frac{1}{x^{n+1}}P(x)\left(\sum_{k=0}^{n} S_{n-k}x^k\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} S_{n-k}x^k\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n+1}}\left(\sum_{0\leq j,k\leq n} a_{n-j}S_{n-k}x^{j+k}\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n+1}}\left(\sum_{0\leq j,k\leq n, j+k>n} a_{n-j}S_{n-k}x^{j+k}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \sum_{r=n+1}^{2n}\left(\sum_{0\leq j,k\leq n, j+k=r} a_{n-j}S_{n-k}x^{r-n-1}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
P'(x) &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{0\leq j,k\leq n, j+k=n+l} a_{n-j}S_{n-k}x^{l-1}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right) && (5)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{0\leq j,i\leq n, j=i+l} a_{n-j}S_{i}x^{l-1}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right) && (6)\\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-l} a_{n-i-l}S_{i}x^{l-1}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right) && (7)
\end{aligned}$$

Mais, d'autre part, on a $P'(x)=\displaystyle\sum_{l=1}^{n} la_{n-l}x^{l-1}$ ce qui exige que, en $+\infty$,

$$\sum_{l=1}^{n}\left(la_{n-l}-\sum_{i=0}^{n-l}a_{n-i-l}S_i\right)x^{l-1}=O\left(\frac{1}{x}\right).$$

ou encore $\forall l\in\mathbb{N}_{n-1},\ \ la_{n-l}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-l}a_{n-i-l}S_i=na_{n-l}+\sum_{i=1}^{n-l}a_{n-i-l}S_i$ d'où

$$\forall k\in\mathbb{N}_{n-1},\ \ -(n-l)a_{n-l}=\sum_{i=1}^{n-l}a_{n-l-i}S_i$$

ceci est équivalent à

$$\forall k\in\mathbb{N}_{n-1},\ \ a_k=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}S_i\quad (1)$$

D'autre part, puisque λ_j est une racine de P, alors $\forall j\in\mathbb{N}_n,\ \ P(\lambda_j)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\lambda_j^i=0$. Par addition de ces égalités, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}S_i=0$$

Comme $S_0=n$, l'égalité (1) reste vrai dans le cas $k=n$.

3. Montrons par récurrence sur l'entier k que $B_k = \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}A^i$ (2). La propriété est bien vérifiée pour $k=1$. Supposons qui elle est vraie pour tout $k \in N_{n-1}$. on a :

$$B_{k+1} = A(B_k + a_kI_n) = A\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}A^i\right) + a_kA = \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i}A^i$$

ce qui montre la propriété (2) pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

D'autre part, supposons que $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}X^k$. Puisque A est trigonalisable, alors elle est semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale est formée par $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Donc $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = S_k$, ce qui montre que $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, en effet, on a $a_0 = b_0 = 1$ et $b_1 = -\operatorname{tr}(A) = a_1$. Si on suppose $a_j = b_j$ pour $j < k$, donc :

$$a_k = -\frac{1}{k}\operatorname{tr}(B_k) = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\operatorname{tr}(A^i) = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}S_i = b_k.$$

Exercice IV

On a déjà $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et par linéarité $P(A) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ pour tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. D'où :

$$\{ P(A) \mid P \in K[X] \} = \mathbb{K}[A] \subset \mathscr{D}_n(K)$$

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. On suppose que $P(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$ est nulle et on doit montrer que les α_k sont nuls. La matrice $P(A)$ est en fait une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $P(\lambda_i)$. Dire que $P(A)$ est nulle c'est donc dire que les scalaires λ_i sont des racines du polynôme P, qui est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Cela implique bien sur que $P=0$, ce qui prouve que la famille $\{ I, A, A^2, ..., A^{n-1} \}$ est libre.

Soit $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$ une matrice diagonale et $P = \sum_{i=1}^{n} d_iL_i$ le polynôme d'interpolation de Lagrange au points $(\lambda_i, d_i)_{1\le i\le n}$. On a donc $\forall i = 1, 2, ..., n$, $P(\lambda_i) = d_i$, donc :

$$P(A) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), ..., P(\lambda_n)) = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = D$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Par division euclidienne il existe des polynômes Q et R tels que $P = \pi_AQ + R$ et donc $P(A) = R(A)$ avec $\deg R \le n-1$, d'où $P(A) \in \operatorname{Vect}(I, A, ..., A^{n-1})$.

Conclusion :

$$\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(I, A, ..., A^{n-1}).$$

Problème

Partie. I

1. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$. λ est une valeur propre de A.

2. (a) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, alors si $X \in E_\lambda$ on a $ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda BX$, c'est-à-dire $BX \in E_\lambda$. Un raisonnement analogue montre que $A.E_\mu \subset E_\mu$ pour tout $\mu \in \operatorname{Sp}(B)$.

(b) A admet au moins une valeur propre λ. Soit E_λ le sous-espace propre de A associé à λ. B commute avec A et donc laisse stable E_λ. La restriction de B à E_λ est un endomorphisme de E_λ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à A et B.

(c) Soit X un vecteur propre commun à A et B. On complète la famille libre (X) en une base $\mathscr{B} = (X, E_2, ..., E_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Il existe des scalaires α_{11} et β_{11} tels que $AX = \alpha_{11}X$ et $BX = \beta_{11}X$. Dans la base $\mathscr{B}$, les matrices A et B sont semblables respectivement à $A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \times \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \times \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ où A_1 et B_1 sont des matrices de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

(d) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. On a $A' = PAP^{-1}$ et $B' = PBP^{-1}$, donc :

$$A'B' = \left(PAP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right) = PABP^{-1} = PBAP^{-1} = \left(PBP^{-1}\right)\left(PAP^{-1}\right) = B'A'$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur la taille $n \in \mathbb{N}^*$ des matrices. .
• Si $n = 1$, c'est clair.
• Soit $n \geq 1$. Supposons que deux matrices de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ qui commutent soient simultanément trigonalisables.
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. D'après **2.(c)** il existe une matrice inversible de taille n telle que

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \times \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

et

$$B = P\begin{pmatrix} \beta_{11} & \times \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Un calcul par blocs montre que A_1 et B_1 commutent. Par hypothèse de récurrence, A_1 et B_1 sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible de taille $n-1$ P_1 et deux matrices triangulaires supérieures de taille $n-1$ T_1 et T_1' telles que $P_1^{-1}A_1P_1 = T_1$ et $P_1^{-1}B_1P_1 = T_1'$.
Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$. S est inversible de format n car $\det(S) = \det(P_1) \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $S^{-1}AS$ et $S^{-1}BS$ sont triangulaires supérieures. S est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base de trigonalisation simultanée de A et B.

Partie. II

1. Il est clair que les applications $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont des applications linéaires.

2. Soit Y une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}(Y) = \mathscr{A}(YB) = AYB$ et $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}(Y) = \mathscr{B}(AY) = AYB$, donc $\mathscr{A} \circ \mathscr{B} = \mathscr{B} \circ \mathscr{A}$.

3. Si λ est valeur propre de A de colonne propre $X \neq 0$ alors pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les colonnes sont égales à X, on a $AM = \lambda M$ avec $M \neq 0$. Ainsi λ est aussi valeur propre de $\mathscr{A}$.
Inversement, si λ est valeur propre de $\mathscr{A}$ d'élément propre $M \neq 0$ alors pour X colonne non nul de M, on a $AX = \lambda X$ donc λ valeur propre de A.
D'où :

$$\mathrm{Sp}(\mathscr{A}) = \mathrm{Sp}(A).$$

On remarque $MB = {}^t({}^tB{}^tM)$. Un raisonnement semblable au précédent permet d'établir que les valeurs propres de $\mathscr{B}$ sont les valeurs propres de ${}^tB$, c'est-à-dire celles de B.

4. (a) Soient α une valeur propre A, X un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$, β une valeur propre de ${}^tB$, Y un vecteur non nul tel que ${}^tBY = \mu Y$. La matrice $M = X{}^tY$ est non nulle (matrice de rang 1), et telle que : $\mathscr{F}(M) = (\lambda - \mu)M$.

(b) D'après le résultat de la première partie $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ se trigonalisent dans la même base. Plus précisément, il existe une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans la quelle les matrices de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont triangulaires à éléments diagonaux respectivement $(\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)}$ et $(\mu)_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)}$. Ainsi, dans la même base, $\mathscr{F}$ admet une représentation matricielle triangulaire où les éléments de la diagonale sont de la forme $\lambda - \mu$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$. Autrement dit pour chaque $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathscr{F})$ il existe $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$ tel que $\alpha = \lambda - \mu$.[1]

(c) B et ${}^tB$ ont même polynôme caractéristique, donc même spectre.

(d) D'après ce qui précède :

$$\mathrm{Sp}(\mathscr{F}) = \left\{ \lambda - \mu \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } \mu \in \mathrm{Sp}({}^tB) \right\} = \{ \lambda - \mu \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } \mu \in \mathrm{Sp}(B) \}.$$

5. $\mathscr{F}$ est inversible si, et seulement si, $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathscr{F})$ ou encore si, et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

6. A admet une valeur propres double qui est 3 et une valeur propre simple qui est 6, par contre B admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir $0, 1$ et 4. Donc $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \{3\}$ ce qui montre que l'endomorphisme $\mathscr{F}$ (associé à ces deux matrices) n'est pas inversible et donc $\ker \mathscr{F} = \{ Z \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \mid AZ - ZB = 0 \}$ n'est pas vide. D'après l'étude précédente 0 est une valeur propre de $\mathscr{F}$, obtenue à partir de 3 considérée comme une valeur propre de A et de B. Cherchons donc les sous-espaces propres associés à 3 pour A et B.

Les calculs montrent $E_3(A) = \mathrm{Vect}(X)$ avec $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_3(B) = \mathrm{Vect}(Y)$ avec $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\{ Z \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \mid AZ - ZB = 0 \} = E_0(\mathscr{F}) = \ker(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}(Z)$$

avec $Z = X{}^tY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

• • • • • • • • • • •

1. Autre méthode : Si α est une valeur propre de $\mathscr{F}$, et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant $\mathscr{F}(M) = \alpha M$, donc $AM = M(\alpha I_n + B)$. On voit par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$, et par linéarité, que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A)M = MP(\alpha I_n + B).$$

Prenons pour P le polynôme caractéristique χ_A de A. Alors $\chi_A(A) = 0$ (Hamilton-Cayley), d'où $0 = M\chi_A(\alpha I_n + B)$. Mais, comme M est non nulle, la matrice $\chi_A(\alpha I_n + B)$ est non inversible. Or $\det\left(\chi_A(\alpha I_n + B)\right) = \prod_{i=1}^{n} \chi_A(\alpha + \mu_i)$ où $\mathrm{Sp}(B) = \{ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \}$. Cela découle de ce que B est trigonalisable et donc

$$\mathrm{Sp}\, \chi_A(\alpha I_n + B) = \{ \chi_A(\alpha + \mu_1), \chi_A(\alpha + \mu_2), \ldots, \chi_A(\alpha + \mu_n) \}.$$

Comme $\det\left(\chi_A(\alpha I_n + B)\right) = 0$, l'un des $\alpha + \mu_i$ est une valeur propre de A et par suite il existe $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\alpha + \mu_i = \lambda_i$.