Devoir libre $n^\circ 04$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Étude des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre p

Partie I

1. Il est clair que E est stable par addition et par multiplication par un scalaire, donc E est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Si $(y_i)_{0\leq i\leq p-1}$ sont p scalaires quelconques de $\mathbb{C}^p$, il existe une unique suite de E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall i \in \{0, 1, ..., p\}, \quad x_i = y_i.$$

Il en résulte que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_0, x_1, ..., x_{p-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier E est de dimension finie et $\dim E = \dim \mathbb{C}^p = p$.

2. (a) On vérifie facilement que f est un endomorphisme de E, de plus si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = 0$, alors la relation de récurrence permet de déduire que $\alpha_0 x_0 = 0$, donc f est injectif si, et seulement si,$\alpha_0 \neq 0$.

(b) Soit $(e_0, e_1, ..., e_{p-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$, notons $s_i = \varphi^{-1}(e_i)$, $i \in [\![0, p-1]\!]$. Comme φ est un isomorphisme, alors $(s_0, s_0, ..., s_{p-1})$ est une base de E.
Précisons d'abord la définition de f. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ on a $f(x) = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}, ..)$.
Donc pour $x \in E$, cela s'écrit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_0 s_0 + x_1 s_1 + ... + x_{p-1} s_{p-1}$, d'où :

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})) = x_1 s_0 + x_2 s_1 + ... + x_p s_{p-1}.$$

La matrice A de f dans la base $(s_0, s_1, ..., s_{p-1})$ est obtenue en en appliquant le calcul précédent aux vecteurs de base $(s_i)_{0\leq i\leq p-1}$.
On a $f(s_0) = \alpha_0 s_{p-1}, \quad f(s_1) = s_0 + \alpha_1 s_{p-1}, ..., f(s_{p-1}) = e_{p-2} + \alpha_{p-1} s_{p-1}$.
On en déduit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Partie II

1. (a) On vérifie facilement que (1) s'écrit sous-forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ ou encore $X_n = A^n X_0$.

(b) On trouve $\chi_A(X) = (-1)^n (X^n - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i)$. (voir cours)

2. (a) La suite géométrique $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ est dans E si, et seulement si, pour tout entier naturel n, on a :

$$\lambda^{n+p} = \alpha_0 \lambda^n + ... + \alpha_{p-2} \lambda^{n+p-2} + \alpha_{p-1} \lambda^{n+p-1}$$

ou encore

$$\lambda^p - \alpha_{p-1} \lambda^{p-1} - ... - \alpha_1 \lambda - \alpha_0 = 0.$$

(b) Il suffit de vérifier que la famille de p éléments $(\lambda_0^n)_{n\geq 0}, (\lambda_1^n)_{n\geq 0}, \ldots, (\lambda_{p-1}^n)_{n\geq 0}$ est libre. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i\lambda_i^n = 0$, alors en particulier, on obtient, pour $n = 0, 1, \ldots, p-1$, le système de Vandermonde suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1} = 0 \\ a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + \ldots + a_{p-1}\lambda_{p-1} = 0 \\ \vdots \\ a_0\lambda_0^{p-1} + a_1\lambda_1^{p-1} + \ldots + a_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-1} = 0 \end{array}\right.$$

Donc $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$, puisque les λ_i sont deux à deux distincts.
L'équation caractéristique associée s'écrit $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, dont les racines sont $1, 2, 3$, donc les suites réelles vérifiant (3) sont les suites de terme générale

$$u_n = a1^n + b2^n + c3^n$$

avec a, b et c des constantes réelles.

(c) Si λ est une solution double de $p(x) = x^p - \alpha_{p-1}x^{p-1}\ldots - \alpha_1 x - \alpha_0$, il est aussi solution double de

$$q(x) = x^n p(x) = x^{n+p} - \alpha_{p-1}x^{n+p-1} - \ldots - \alpha_1 x^{n+1} - \alpha_0 x^n.$$

Ainsi

$$0 = \lambda q'(\lambda) = (n+1)\lambda^{n+1} - \alpha_{p-1}(n+p-1)\lambda^{n+p-1} - \ldots$$
$$-\alpha_1(n+1)\lambda^{n+1} - \alpha_0 n\lambda^n,$$

et par conséquent la suite $(n\lambda^n)_{n\geq 0}$ est bien dans E.
L'équation caractéristique associée s'écrit $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, avec 2 racine double et 1 racine simple, donc les suites réelles vérifiant (4) sont les suites de terme générale

$$u_n = a1^n + b2^n + cn2^n = a + (b+cn)2^n$$

avec a, b et c des constantes réelles.

(d) De manière générale, si λ est une racine d'ordre p de p, alors il est de même pour q, ainsi pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$,

$$0 = \lambda^j q^{(j)}(\lambda) = (n+p)(n+p-1)\ldots(n+p-j+1)\lambda^{n+p}$$
$$+\ldots + \alpha_0 n(n-1)\ldots(n-j+1)x^n$$

donc les suites $v_j = (n(n-1)\ldots(n-j+1)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$ sont des éléments de E.
Montrons que les suites $\{v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ forment une base de E. Posons

$$a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_{p-1}v_{p-1} = 0$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_0\lambda^n + a_1 n\lambda^n + \ldots + a_{p-1}n(n-1)\ldots(n-p+2)\lambda^n = 0$$

Donc

$$-a_0 = a_1 n + n(n-1)a_2 + \ldots + a_n n(n-1)\ldots(n-p+2).$$

Or a_0 est une constante et la partie droite de l'équation n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$. Aussi $a_0 = 0$ et

$$0 = a_1 n + n(n-1)a_2 + \ldots + a_n n(n-1)\ldots(n-p+2).$$

On simplifie par n et on recommence pour montrer que tous les scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ sont nuls.
Appelons $\{w_0, w_1, \ldots, w_{p-1}\}$ les suites définies par $w_j = (n^j\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La matrice de passage de $\{v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ à $\{w_0, w_1, \ldots, w_{p-1}\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Elle est triangulaire supérieure de diagonale formée de 1. Elle est donc inversible et la famille $\{w_0, w_1, ..., w_{p-1}\}$ est une base de E.

Dans ce cas la solution générale de (1) est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme générale est de la forme

$$x_n = a_0\lambda^n + a_1 n\lambda^n + ... + n^{p-1}\lambda^n,$$

où les a_i sont des constantes.

3. Dans ce cas la solution générale de (1) est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme générale est de la forme

$$x_n = \sum_{k=1}^{r} P_k(n)\lambda_k^n,$$

où les P_k sont des polynômes avec $\deg P_k \leq \beta_k - 1$.

• • • • • • • • • • •