Devoir libre $n^\circ 03$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Problème I

Partie I

1. Les solutions de (E) sont exactement l'ensemble des racines 3-ème de l'unité qui sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \overline{j} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Vérification immédiate.
3. Il s'agit d'un système de Vandermonde [1], associé à la matrice $V(1, j, j^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}$. Comme $1, j, j^2$ sont deux à deux distincts, alors $V(1, j, j^2)$ est inversible et donc $(0, 0, 0)$ est l'unique solution.

Partie II

1. C'est de cours.
2. Il est clair que la suite nulle est un élément de $\mathscr{F}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathscr{F}$. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} + \lambda v_{n+3} = u_n + \lambda v_n.$$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}$ et par conséquent $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
3. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(y_n)_{n\in\mathbb{N}} + \gamma(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$, donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha + \beta j^n + \gamma j^{2n} = 0.$$
La dernière question de la partie I montre que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la $\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \}$ est une famille libre.
4. On peut vérifier facilement que l'application Φ est linéaire, de plus pour chaque $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ il existe une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $u_{n+3} = u_n$. Donc Φ est un isomorphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{C}^3$. Comme $\mathbb{C}^3$ est de dimension finie, il est de même de $\mathscr{F}$ et on a :
$$\dim(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{C}^3) = 3.$$
5. Les trois suites de la question 3 sont des éléments de $\mathscr{F}$ et forment une famille libre, donc elles constituent une base de $\mathscr{F}$.

Partie III

1. On trouve $\det(A - rI) = 1 - r^3$.
2. Si $r \in \{ 1, j, j^2 \}$, $\det(A - rI) = 0$ et donc $\operatorname{rg}(A - rI) < 3$, c'est-à-dire les colonnes de $A - rI$ ne sont pas linéairement indépendantes.
3. On a $I_r = \operatorname{Im}(A - rI)$, donc si $r \in \{ 1, j, j^2 \}$, $\operatorname{rg}(A - rI) < 3$ et par conséquent $\dim(I_r) \leq 2$.

1. On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant suivant : $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Il vaut : $\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$.

Problème II

1. (a) Posons $T_n(x,y) = (a_{ij})_{1\leq i,\leq j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $A(t)$ la matrice dont le terme général est $a_{ij}+x$.
Retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors $\det A(t)$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $a_{i1}+t$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de t). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que $\det(A(t)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(a_{i1}+t)\det(A_i)$ où A_i est une matrice à coefficients réels. Donc $\det A(t)$ et un polynôme et t de degré inférieur ou égal à 1. Ainsi, il existe α et β tels que $\det A(t) = \alpha t+\beta$. En particulier, $T_n(x,y) = \det A(0) = \beta$.
D'autre part, $\alpha y+\beta = \det A(y) = (1+y)^n$ et $\alpha x+\beta = (1+x)^n$, ce qui permet de terminer α et β d'une manière unique $(x\neq y)$, on trouve :

$$\alpha = \frac{(1+x)^n-(1+y)^n}{x-y}$$

et

$$\beta = \det T_n(x,y) = \frac{x(1+y)^n - y(1+x)^n}{x-y}.$$

(b) On retranche la colonne C_1 aux autres colonnes C_i ($2\leq i\leq n$ pour faire apparaître des 0 :

$$\det T_n(x,x) = \begin{vmatrix} 1 & -x-1 & -x-1 & \dots & -x-1 \\ -x & 1+x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 0 & 1+x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x & 0 & 0 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

On remplace ensuite la première L_1 par la somme $L_1+L_2+L_3+\dots+L_n$ pour obtenir une matrice triangulaire inférieure :

$$\det T_n(x,x) = \begin{vmatrix} 1-(n-1)x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 0 & 1+x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x & 0 & 0 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = [1-(n-1)x]\,(1+x)^{n-1}.$$

(c) On pose $f(x,y) = y(1+x)^n - x(1+y)^n$. f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, en particulier elle admet une dérivée partielle continue par rapport à y, de plus on a :

$$\lim_{y\to x} T_n(x,y) = \lim_{y\to x}\frac{f(x,y)-f(x,x)}{y-x} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = (1+x)^n - nx(1+x)^{n-1} = T_n(x,x).$$

Donc T_n est bien continue en (x,x) et ceci pour tout $(x,x)\in\mathscr{P}$.

2. (a) On a $T_n(x,y)>0$ si, et seulement si, $y(1+x)^n - x(1+y)^n > 0$ (car $y-x>0$) ce qui est équivalent à $\dfrac{x}{(1+x)^n} < \dfrac{y}{(1+y)^n}$.
D'autre part, considérons la fonction $g(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$. g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et

$$\forall x\geq 0,\ \ g'(x) = \frac{(1+x)^{n-1}\,[1-(n-1)x]}{(1+x)^{2n}}.$$

D'où la tableau de variations de g :

x	0		$\frac{1}{n-1}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{n-1}\right)$	$\searrow$	0

Donc la fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et en particulier si $x<y\leq\frac{1}{n-1}$, alors $g(x)<g(y)$, c'est-à-dire $\frac{x}{(1+x)^n}<\frac{y}{(1+y)^n}$, et donc $T_n(x,y)>0$.

(b) On a $\det T_n(x,x)=[1-(n-1)x]\,(1+x)^{n-1}$, donc $\det T_n(x,x)>0$ si, et seulement si, $1-(n-1)x>0$ ou encore $x<\frac{1}{n-1}$.

3. (a) Notons $\chi_n(x,y)$ le polynôme caractéristique de $T_n(x,y)$. Comme dans la première question, si $x=y$, on trouve :

$$\chi_n(x,x)(\lambda)=(\lambda-1-x)^{n-1}\left[\lambda-1+(n-1)x\right].$$

Donc $T_n(x,x)$ admet deux valeurs propres (réelles), $1+x$ d'ordre $n-1$ et $1-(n-1)x$ simple.

La matrice $T_n(x,x)-(1+x)I_n$ est de rang 1, toutes les colonnes sont identiques à $\begin{pmatrix}-x\\-x\\\vdots\\-x\end{pmatrix}$, donc le sous espace associé à cette valeur propre est de dimension $n-1$, c'est l'hyperplan d'équation $\sum_{n=1}^{n}\alpha_i=0$.

On remarque que $T_n(x,x)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=[1-(n-1)x]\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1-(n-1)x$.

(b) Comme dans la première question, on trouve :

$$\chi_n(x,y)(\lambda)=\frac{x(\lambda-1-y)^n-y(\lambda-1-x)^n}{x-y}.$$

Donc les valeurs propres de $T_n(x,y)$ sont les racines de l'équation :

$$(*)\;\; x(\lambda-1-y)^n-y(\lambda-1-x)^n=0.$$

• Si $x=0$, 1 est la seule valeur propre et dans ce cas $T_n(0,y)$ ne peut pas être diagonalisable, sauf si $y=0$ ce qui est absurde.

• Si $x\neq 0$ l'équation $(*)$ est équivalente à $\left(\frac{\lambda-1-x}{\lambda-1-y}\sqrt[n]{\frac{y}{x}}\right)^n=1$, donc les valeurs propres de $T_n(x,y)$ sont données par les formules :

$$\lambda_k=1+x+(x-y)\frac{w^k}{\sqrt[n]{\frac{y}{x}}-w^k},\;\; w^k=e^{\frac{2i\pi k}{n}},\;\; k=0,1,...,n-1.$$

On peut vérifier facilement que les λ_k sont distinctes, donc la matrice $T_n(x,y)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } T_n(x,y)\Rightarrow\chi_n(x,y)(\lambda)=0\Rightarrow y(\lambda-(1+x))^n-x(\lambda-(1+y))^n=\frac{x}{y}\Rightarrow\left|\frac{\lambda-(1+x)}{\lambda-(1+y)}\right|=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

Soient M le point du plan d'affixe λ, A le point du plan d'affixe $1+x$ et B le point du plan d'affixe $1+y$ puis $k=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$. k est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser $I=\operatorname{bar}(A(1),B(-k))$ (barycentre de $A(1)$ et $B(-k)$) et $J=\operatorname{bar}(A(1),B(k))$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } T_n(x,y) &\Rightarrow MA=kMB\\
&\Rightarrow MA^2-k^2MB^2=0\\
&\Rightarrow (\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})=0\\
&\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}.(1+k)\overrightarrow{MJ}=0\\
&\Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0\\
&\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I,J].
\end{aligned}$$

•••••••••••