ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⴻⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ
ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ ⴷ ⵓⵙⵏⴼⵍⵓⵍ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والابتكار

Royaume du Maroc
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

Constructeur de compétences

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés
Session 2024

Épreuve de **Mathématiques II**

Filière : **MP**

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte **4 pages** au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de tout document et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est **interdit**.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On désigne par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Vérifier que $PQ = 4I_3$.

(b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.

(b) Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.

(c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

3. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.

(c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $n \geq 1$ et par $\mathscr{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = I$ et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$ où I désigne l'application identité de E. On note $\chi_f(X) = \det(XI - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E.

Pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

Partie 1 : Noyaux itérés

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k, $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \Im(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. En déduire que $(\dim N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $Nq = N_{q+1}$.

4. Montrer que $I_q = I_{q+1}$.

5. Montrer que $N_k \oplus I_k = E$.

6. On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f à I_k.

(a) Montrer que $\dim I_k - \dim I_{k+1} = \dim(\ker(f) \cap I_k)$.

(b) En déduire que la suite $(\dim N_{k+1} - \dim N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U.

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\mathrm{Im}(u^r)$.

(a) Vérifier que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(a^{s+r})$.

(b) Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^s)$.

(c) Montrer que $\dim(\ker(u^{r+s})) \leq \dim(\ker(u^r)) + \dim(\ker(u^s))$.

(d) En déduire que pour tout entier naturel i, $\dim(\ker(u^i)) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

(a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\ker(u^i)) = i$.

(b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.

(c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathscr{B}_e = \big(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\big)$ soit me base de E.

(d) Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_e$.

3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathscr{L}(E)$ vérifiant $(I, f, .., f^{n-1})$ est libre. On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f, où $\lambda_1, .., \lambda_p$, sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, ..., m_p$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \ker(f - \lambda_k I)^{m_k}$.

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f.

2. Montrer que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$.

3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.

(a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

(b) Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k.

(c) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de k est m_k.

4. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc est une matrice de $\mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

Partie 4 : Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_o de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $\left(x_0, f(x_o)...., f^{p-1}(x_o)\right)$ est un p-cycle de f.

1. Soit $\left(x_0, f(x_o)...., f^{p-1}(x_o)\right)$ un p-cycle de f.

(a) Montrer que $f^p = I$.

(b) Montrer que l'ensemble $F_{x_o} = \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \left(x_0, f(x_o)...., f^{p-1}(x_o)\right) \text{ est une famille libre} \right\}$ admet un maximum note γ.

(c) i. Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_o) \in \text{Vect}\left(x_0, f(x_o)...., f^{p-1}(x_o)\right)$.

ii. Montrer que $\gamma = n$.

iii. Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f.

2. Soit $B_{x_o} = \left(x_0, f(x_o)...., f^{n-1}(x_o)\right)$ un n-cycle de f.

(a) Justifier que B_{x_o} est une base de E.

(b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_o}

(c) On pose $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{w}^k \\ \overline{w}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{w}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{w}$ désigne le conjugué de w.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k, est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1\leq k,I\leq n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{w}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m_{k,l}})_{1\leq k,l\leq n}$, où $\overline{m_{k,l}}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

(a) Calculer $M\overline{M}$.

(b) En déduire que $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1}.

4. Soit $(b_o, b_1, ..., b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & b_0 & \dots & b_3 & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que H est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note $\mathscr{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathscr{T}$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à $\mathscr{T}$.

3. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{T}$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathscr{N}$ telle que $\dim(F) > \dfrac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

5. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans N.

FIN DE L'ÉPREUVE