

Épreuve de Mathématiques I

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••

Exercice

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-x^2} = 0$ (par règle de domination), donc $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
- La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge.
- (a) $I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-x^2})' dx = \frac{-1}{2} [e^{-x^2}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{+\infty} x^{n+2} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n+1} (e^{-x^2})' dx \\ &= \frac{-1}{2} [x^{n+1} e^{-x^2}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (n+1) x^n e^{-x^2} dx \\ &= \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

- (c) Soit k un entier naturel non nul, d'après ce qui précède, on a :

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2} I_{2k-1} = \frac{2k}{2} \times \frac{2k-2}{2} \times \dots \times \frac{2}{2} I_1 = \frac{k!}{2}.$$

Relation valable également pour $k = 0$.

- (d) De même, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2} \times \frac{2k-3}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k+1} k!} \sqrt{\pi}.$$

Relation valable également pour $k = 0$.

Problème

Partie 1

Développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$

1. (a) On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \frac{-1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) = \frac{-1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right), \end{aligned}$$

$$\text{d'où } u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

- (b) Par comparaison des séries à termes positifs, et comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, alors la série télescopique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_n - u_{n+1})$ converge.
- (c) La suite de somme partielles de la série convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_n - u_{n+1})$ converge, ce qui est équivalent à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (d) D'après le théorème de accroissements fini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_k \in]k, k+1[$ tel que

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{(k+1) - k} = \frac{1}{c_k} \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right[.$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k},$$

puis par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Inégalité qui s'écrit aussi sous la forme demandée :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

- (e) La première inégalité à gauche de la question précédente implique $H_n - \ln(n) \leq 1$. L'autre inégalité à droite implique $\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, c'est-à-dire $H_n - \ln(n) > 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

Lorsque n tend vers l'infini on obtient l'inégalité en question :

$$0 \leq \gamma \leq 1.$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right). \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
 v_n &= u_n - \gamma \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right) - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) \right) \\
 &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{k}{k-1} \right) - \frac{1}{k} \right)
 \end{aligned}$$

(c) Pour k assez grand, on a :

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{k}{k-1} \right) - \frac{1}{k} &= -\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o \left(\frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{k} \\
 &\sim \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)
 \end{aligned}$$

D'après l'équivalence des restes des séries convergentes à termes positifs, on a alors :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\ln \left(\frac{k}{k-1} \right) - \frac{1}{k} \right) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2n}.$$

Donc $v_n = u_n - \gamma = \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$ ou encore $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} - w_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= -\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
 &= \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \\
 &= \frac{1}{6n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right).
 \end{aligned}$$

Donc $w_{n+1} - w_n \sim \frac{1}{6n^3}$.

(b) D'une manière évidente, on a :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n(n+1))^2} = \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} \sim \frac{2}{n^3}.$$

Par comparaison des restes, on a donc $\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{k^3}$ ce qui donne $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$.

- (c) On a $w_{n+1} - w_n \sim \frac{1}{6n^3}$, donc $\sum_{k=n}^{\infty} (w_{k+1} - w_k) \sim \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ce qui implique $-w_n \sim \frac{1}{6} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{12n^2}$.
 $\ln(n) - H_n + \gamma + \frac{1}{2n} = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. (a) Puisque la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente, alors la suite de sommes partielles, c'est-à-dire $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, est non bornée et tend vers $+\infty$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $H_k \geq n$ dès que $k \geq k_0$, ce qui montre l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* | H_k \geq n\}$ est non vide, et puisqu'il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$, alors il admet un minimum.
 (b) On sait que $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$. Par définition de m_n , on a $\ln(m_n) + \gamma + \varepsilon_{m_n} \geq n$ et $\ln(m_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{m_n-1} < n$. De ces deux inégalités on obtient, par application de l'exponentielle :

$$e^{\ln(m_n-1)+\gamma+\varepsilon_{m_n-1}} < e^n \leq e^{\ln(m_n)+\gamma+\varepsilon_{m_n}}.$$

D'où :

$$e^n e^{-\gamma-\varepsilon_{m_n}} \leq m_n < e^n e^{-\gamma-\varepsilon_{m_n-1}} + 1$$

puis

$$e^{-\varepsilon_{m_n}} \leq \frac{m_n}{e^n e^{-\gamma}} \leq e^{-\varepsilon_{m_n-1}} + \frac{1}{e^n e^{-\gamma}}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{e^n e^{-\gamma}} = 1$, c'est-à-dire $m_n \sim e^n e^{-\gamma}$ et donc $\frac{m_{n+1}}{m_n} \sim \frac{e^{n+1} e^{-\gamma}}{e^n e^{-\gamma}} = e$. Par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} = e$.

Partie 2

Étude de deux exemples des séries de fonctions

1. (a) Soit $x > 0$ fixé. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc si $n \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}.$$

Donc $\varphi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \geq 0$ et $\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \geq 0$. D'où :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \varphi_n(x) \leq \psi_n(x).$$

- (b) Soit $x > 0$ fixé. Puisque la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \psi_n(x)$ converge. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n(x)$ converge. D'où la convergence simple de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n$ sur $]0, +\infty[$.

- (c) Soit a un réel strictement positif. Pour $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}.$$

Cette inégalité, montre que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et comme les φ_n sont continues sur $]0, +\infty[$, alors la fonction somme φ est continue sur $]0, +\infty[$.

- (d) i. Soit $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \right)$$

Le série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ sont convergentes, donc on peut écrire :

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \right) = \zeta(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \zeta(x) + \frac{1}{1-x} = K(x).$$

- ii. la fonction φ coïncide avec K sur $]1, +\infty[$ et φ continue sur $]0, +\infty[$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} K(x)$ existe et vaut

$$\varphi(1) = \gamma.$$

- iii. On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)K(x) = 1$, donc $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ à droite de 1.

2. (a) Si $x > 0$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est une série alternée dont le terme général en valeur absolue décroît et

tend vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge.

- (b) Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$, alors on peut appliquer le théorème de double limite et on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

ce qui est impossible.

- (c) Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f'_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n^x}$. L'étude de la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ ($x > a > 0$ fixé), montre qu'elle est décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{x}}, +\infty\right[$, donc on peut conclure la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang n_0 et tend vers 0. Donc d'après l'inégalité donnée par le critère spécial des séries alternées, on a :

$$\forall x \geq a, \forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f'_k(x) \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Le terme à droite tend vers 0 indépendamment de x quand n tend vers $+\infty$. Donc on peut conclure la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ sur intervalle de la forme $[a, +\infty[$ ($a > 0$).

- (d) Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et

la série de dérivées $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f'_n$ converge uniformément sur chaque $[a, +\infty[$ ($a > 0$), alors on peut conclure que la fonction f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n^x}.$$

3. (a) On divise la somme en deux termes : somme sur les indices pairs puis les indices impaires, on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^x} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p-1)^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^x} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p-1)^x}.$$

(b) De même, on a :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^x} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)^x} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p-1)^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^x} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p-1)^x}.$$

(c) Les deux relations précédentes, impliquent :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^x} = \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\zeta(x) + f(x) = \frac{1}{2^{x-1}} \zeta(x)$$

qui s'écrit également :

$$f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$$

et ceci pour tout $x \in]1, +\infty[$.

4. (a) Posons $h(x) = 2^{1-x} - 1 = e^{(1-x)\ln(2)} - 1$, alors $h(x) = h(1) + h'(1)(x-1) + h''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$.
Après calcul, on trouve :

$$\begin{aligned} 2^{1-x} - 1 &= -\ln(2)(x-1) + \frac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \\ &= -\ln(2)(x-1) + \frac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon_1(x) = 0$.

- (b) D'après la question 1.d) de cette partie, on a $\forall x > 1$, $\varphi(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$, de plus φ est continue sur $]0, +\infty[$, en particulier en 1, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\zeta(x) + \frac{1}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \gamma.$$

Si on pose $\varepsilon_2(x) = \left(\zeta(x) + \frac{1}{1-x} \right) - \gamma$, alors $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + \varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varepsilon_2(x) = 0$.

Comme $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$ et $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + \varepsilon_2(x)$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-\ln(2)(x-1) + \frac{\ln(2)^2}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon_1(x) \right) \left(\frac{1}{x-1} + \gamma + \varepsilon_2(x) \right) \\ &= -\ln(2) + \left(\frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2) \right) (x-1) + (x-1) \varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varepsilon_3(x) = 0$.

- (c) On a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\ln(2)$ (f est continue sur $]0, +\infty[$, en particulier en 1).

De même par continuité de f' en 1, on a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma \ln(2)$.

Partie 3

Calcul d'une intégrale

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \int_0^n \ln(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right) du \\ &= I_{n,k-1} + \int_0^n \left(\frac{-1}{n}\right) (u \ln(u)) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1} du \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(\frac{-1}{n}\right) (u \ln(u)) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1} &= \int_0^n (u \ln(u)) \left[\frac{1}{k} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k\right] du \\ &= \left[\frac{1}{k} u \ln(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k\right]_0^n - \frac{1}{k} (\ln(u) + 1) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du \\ &= -\frac{I_{n,k}}{k} - \frac{1}{k} \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du \\ &= -\frac{I_{n,k}}{k} - \left[\frac{-n}{k(k+1)} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n. \end{aligned}$$

D'où

$$I_{n,k} = I_{n,k-1} - \frac{I_{n,k}}{k} - \frac{n}{k(k+1)}$$

relation équivalente à celle demandée dans la question.

3. (a) La relation de la dernière question s'écrit encore $(k+1)I_{n,k} = kI_{n,k-1} - \frac{n}{k+1}$, donc

$$J_{n,k} = J_{n,k-1} - \frac{n}{k+1}.$$

(b) On fait varier k de 1 à n et par sommation sur k , on obtient :

$$J_{n,n} = -nu_n - \frac{n}{n+1}$$

et donc

$$I_n = I_{n,n} = \frac{J_{n,n}}{n+1} = -\frac{n}{n+1}u_n - \frac{n}{n(n+1)}.$$

4. (a) L'étude la fonction $t \mapsto -t - \ln(1-t)$ montre qu'elle croissante sur $[0, 1[$ et comme la fonction est nulle en 0, alors $\forall x \in [0, 1[$, $\ln(1-t) \leq -t$ et donc $1-t \leq e^{-t}$. Maintenant si $u \in [0, n]$, $\frac{n}{u} \in [0, 1[$ et donc :

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right) \leq e^{-\frac{u}{n}}$$

relation qui s'écrit aussi

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}.$$

(b) Introduisons $f_n(t) = (-\ln(u))\chi_{[0,n]}(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n$ où $\chi_{[0,n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, n]$. Alors :

• Pour chaque $u > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u \in [0, n]$ et donc $f_n(u) = (-\ln(u)) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n$ qui tend vers $u \mapsto -\ln(u)e^{-u}$.

• On a, pour tout $u > 0$, $|f_n(u)| \leq |-\ln(u)|e^{-u}$, fonction qui est intégrable sur $]0, +\infty[$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne le résultat

(c) On sait que $\int_0^n (-\ln(u)) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = -I_n$ et on a aussi $I_n = -\frac{n}{n+1}u_n - \frac{n}{n(n+1)}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (-\ln(u)) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = -\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \gamma.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} (-\ln(u))e^{-u} du = \gamma.$$

Partie 4

Application à la loi de Gumbel

1. (a) Pour tout segment $[x, y]$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_x^y e^{-t-e^{-t}} dt = \int_x^y \left(e^{-e^{-t}} \right)' dt = \left[e^{-e^{-t}} \right]_x^y = e^{-e^{-y}} - e^{-e^{-x}}.$$

Cette égalité montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t-e^{-t}} dt$ converge et vaut 1.

- (b) La fonction g est continue positive et son intégrale vaut 1 sur $]-\infty, +\infty[$, donc g est une densité d'une variable aléatoire.
- (c) Par définition, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt = e^{-e^{-x}}$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $[x, y]$ un segment de $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_x^y t g(t) dt = \int_x^y t e^{-t-e^{-t}} dt = \int_x^y t e^{-t} e^{-e^{-t}} dt \stackrel{u=e^{-t}}{=} \int_{e^{-x}}^{e^{-y}} (-\ln(u)) u e^{-u} \left(\frac{-du}{u} \right) = \int_{e^{-y}}^{e^{-x}} (-\ln(u)) e^{-u} du.$$

Le dernier terme admet une limite que x tend vers $-\infty$ et y tend vers $+\infty$, ce qui montre que la variable aléatoire X admet une espérance donnée par :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} (-\ln(u)) e^{-u} du = \gamma.$$

3. (a) Si $x < 0$, $F_{X_1}(x) = 0$ et si $x \geq 0$, $F_{X_1}(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$. D'où :

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (b) Par indépendance des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$, on a, pour $x \geq 0$:

$$p(M_n \leq x) = p((X_1 \leq t) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)) = p(X_1 \leq x) \dots p(X_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n.$$

Si $x < 0$, $p(M_n \leq x) = 0$. D'où :

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Puisque $p(M_n \leq x) = p(M_n - \ln(n) \leq x - \ln(n))$, alors $F_{G_n}(x) = F_{M_n}(x + \ln(n))$. On en déduit que

$$F_{G_n}(x) = 0 \text{ si } x < -\ln(n), \text{ et si } x > -\ln(n), F_{G_n}(x) = \left(1 - e^{-x-\ln(n)} \right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)^n.$$

4. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{G_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)^n = e^{-e^{-x}} = F_X(x)$. Donc la suite $(G_n)_{n \geq 2}$ ou $(M_n - \ln(n))_{n \geq 2}$ converge en loi vers X .

•••••