Épreuve de Mathématiques II
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Exercice

1. (a) Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tels que $\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \alpha_3 e'_3 = 0$, donc $(\alpha_1+\alpha_3)e_1 + (\alpha_1+\alpha_2)e_2 + (\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)e_3 = 0$ et comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E, alors :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre et comme $\dim E = 3$, alors la famille est une base de E.

(b) $f_a(e'_1)$ est la somme des trois colonnes, donc $f_a(e'_1) = e_1 + e_2 + e_3 = e'_1$, de même $f_a(e'_2) = a(e_2 + e_3) = ae'_3$ et $f_a(e'_3) = (a-1)(e_1 - e_3) = (a-1)e'_3$. Donc les trois vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 sont des vecteurs propres de f_a, avec des valeurs propres associées respectivement $1, a$ et $a-1$.

(c) Les colonnes de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ sont données par les coordonnées de e'_1, e'_2, e'_3 dans la base (e_1, e_3, e_3) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) L'espace E admet une base de vecteurs propres de l'endomorphisme f_a, donc f_a est diagonalisable.

(e) La matrice D_a est la matrice diagonale formée par les valeurs propres de f_a, c'est la matrice qui représente f_a dans la base de vecteurs propres :

$$D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Le système (S) est équivalent à $\begin{pmatrix} x'(t)1 \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M_{a_0} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ avec $a_0 = 3$.

(b) On a $(S) \Leftrightarrow X'(t) = M_3 X(t) \Leftrightarrow X'(t) = PD_3P^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = D_3P^{-1}X(t)$ et comme P est une matrice constante ne dépend pas de t, alors $P^{-1}X'(t) = \left(P^{-1}X(t)\right)'$, d'où :

$$(S) \Leftrightarrow Y'(t) = D_3Y(t)$$

(c) On obtient les trois équations différentielles : $\begin{cases} y'_1(t) &= y(t) \\ y'_2(t) &= ay(t) \\ y'_3(t) &= (a-1)y_3(t) \end{cases}$, donc $\begin{cases} y_1(t) &= c_1e^t \\ y_2(t) &= c_2e^{at} \\ y_3(t) &= c_3e^{(a-1)t} \end{cases}$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes.

(d) La solution générale du système (S) est donnée par $X(t) = PY(t)$, on trouve :

$$X(t) = c_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{at} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3e^{(a-1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes arbitraires.

(e) La solution du système vérifiant la condition $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$c_1 = -c_3 = 1$ et $c_2 = 0$.

Problème

Partie 1

Cas où A est une matrice possédant n valeurs propres distinctes

1. (a) Puisque A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable (théorème de cours), donc il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.

(b) R est une racine carrée de A est équivalent à $R^2 = A$ ou encore $P^{-1}R^2P = D$ et comme $P^{-1}R^2P = \left(P^{-1}RP\right)^2$, alors R est une racine carrée de A si, et seulement si, $P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

2. (a) Dans ce cas D est un polynôme en Δ, donc D et Δ commutent : $D\Delta = \Delta D$.

(b) $\Delta = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on a $D = (\delta_{ij}\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $\alpha_{ii} = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc l'égalité $D\Delta = \Delta D$ s'écrit à l'aide des coefficients des deux matrices :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\delta_{kj}\alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\alpha_{ik}d_{kj}$$

Après simplification on obtient :

$$d_{ij}\lambda_j = \lambda_i d_{ij}$$

ou encore

$$d_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$$

et comme les λ_i sont distinctes, alors $d_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$, autrement dit Δ est une matrice diagonale.

(c) L'égalité entre matrices $\Delta^2 = D$ entraine nécessairement $\delta_i^2 = \lambda_i$ et ceci pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

3. D'après l'étude précédente si A admet une racine carrée, alors les valeurs propres sont positives. Ainsi, si A admet au moins une valeur propre négative, alors il n'y aura pas de racines carrées, donc $\mathscr{R}_n(A) = \varnothing$.

4. (a) Si toutes les valeurs propres λ_i sont positives, alors

$$\mathscr{R}_n(D) \subset \left\{ \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}\right) \mid \forall i,\ \varepsilon_i = \pm 1 \right\}$$

Inversement, toute matrice de type $B = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}\right)$ (où $\varepsilon_i = \pm 1$) vérifie $B^2 = D$. D'où légalité :

$$\mathscr{R}_n(D) = \{\operatorname{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}) /\ \forall i,\ \varepsilon_i = \pm 1\}.$$

(b) Si toutes les valeurs propres de A sont positives alors chaque racine carrée de D donne une racine carrée de A et par conséquent :

$$\mathscr{R}_n(A) = \left\{ P \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}\right) P^{-1} \mid \forall i,\ \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

(c) Deux cas sont possibles :

• Si $\lambda_1 \neq 0$, alors chaque valeur propre λ_i possède de racines carrées distinctes $\sqrt{\lambda_i}$ et $-\sqrt{\lambda_i}$. Ainsi $R \in \mathscr{R}_n(A)$ si, et seulement il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$ tel que

$$R = P\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1\lambda_1, ..., \varepsilon_n\lambda_n)P^{-1}$$

Donc il y a autant d'éléments dans $\mathscr{R}_n(A)$ que d'éléments dans $\{-1, +1\}^n$. Donc

$$\mathrm{card}\,\mathscr{R}_n(A) = 2^n.$$

• Si $\lambda_1 = 0$, alors les autres valeurs propres sont strictement positives, et dans ce cas il y a une bijection entre $\mathscr{R}_n(A)$ et l'ensemble des applications $\{\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n\}$ dans $\{-1, +1\}$. Donc :

$$\mathrm{card}\,\mathscr{R}_n(A) = 2^{n-1}.$$

5. Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale car A est triangulaire, donc $Sp(A) = \{1, 2, 3\}$, on remarque ausi que $Ae_1 = e_1, Ae_2 = 2e_2$ et $A(e_2 + e_3) = 3(e_2 + e_3)$, donc $(e_1, e_2, e_2 + e_3)$ est une base de vecteurs propres de A, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base initiale à la base de vecteurs propres, donc, d'après l'étude précédente :

$$\mathscr{R}_3(A) = \left\{P\,\mathrm{diag}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{2}, \varepsilon_3\sqrt{3}\right)P^{-1} | \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\right\}$$

Partie 2

Cas où $A = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, ..., \lambda_r I_{n_r})$

1. (a) On a, dans ce cas, $R^2 = I_n$, donc R est une racine d'un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples, donc la matrice R est diagonalisable.

(b) Il est clair que $\left\{P\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)P^{-1} | P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \varepsilon = \pm\right\} \subset \mathscr{R}_n(I_n)$. Réciproquement, soit R une racine carrée de I_n, donc les valeurs propres possibles de R sont 1 et -1, donc R est semblable à une matrice de type $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, ce qui montre l'autre inclusion.

(c) On a $R^2 = \lambda I_n \Leftrightarrow \left(\dfrac{R}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = I_n$, donc R est une racine carrée de λI_n si, et seulement si, $\dfrac{R}{\sqrt{\lambda}}$ est une racine carrée de I_n, donc :

$$\mathscr{R}_n(\lambda I_n) = \left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}P\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)P^{-1} | P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \varepsilon = \pm 1\right\}.$$

2. (a) On note $J_1, J_2, ..., J_r$ les sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ correspondant respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice qui commute avec A. Les calculs montrent que

$$AB = BA \Leftrightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \ (\lambda_i - \lambda_j)b_{ij} = 0.$$

Si i et j appartiennent à un même sous-ensemble J_k, alors $\lambda_i = \lambda_j$ et dans ce cas on peut rien dire sur le coefficient b_{ij}.
Si i et j appartiennent à deux sous-ensembles J_k distincts, alors dans ce cas $b_{ij} = 0$.
Ainsi $AB = BA$ si, et seulement si, tous les coefficients de B sont nuls, sauf les a_{ij} tels que i, j appartiennent simultanément à l'un des sous-ensembles J_k. Donc B est de la forme demandée en question.

(b) Soit R une racine carrée de A, donc $R^2 = A$ et par conséquent $AR = RA$ et par conséquent R est diagonale par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$. D'après les règles de calcul sur les matrices par blocs, on déduit :

$$\forall i = 1, 2, ..., r,\ \ A_i^2 = \lambda_i I_{n_i}.$$

D'après la première question de cette partie, $A_i \in \mathscr{R}_{n_i}(\lambda_i I_{n_i})$. Ainsi,

$$\mathscr{R}_n(A) = \{\mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_r) | A_i \in \mathscr{R}_{n_i}(\lambda_i I_{n_i}),\ \ \forall i \in [\![1, r]\!]\}$$

3. (a) On a $S_q^2 = I_2$, donc $S_q \in \mathscr{R}_2(I_2)$ et $N(S_q) = \max(1,q)$ qui tend vers $+\infty$, donc $\mathscr{R}_2(I_2)$ est une partie non bornée de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Considérons la matrice diagonale par bloc $Y_q = \begin{pmatrix} S_q & (0) \\ (0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$. On a $Y_q^2 = I_n$ et $N(Y_q) = \max(1,q)$ qui tend vers $+\infty$ quand q tend vers $+\infty$, donc $\mathscr{R}_n(I_n)$ est une partie non bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 3

Cas où A est une matrice nilpotente

1. (a) Puisque $B^2 = A$. Donc $B^{2p} = A^p = 0$ et $B^{2p-2} = A^{p-1} \neq 0$.

(b) D'après la question précédente le polynôme minimal de B soit X^{2p} ou X^{2p-1}.

(c) • Si $B^{2p-1} \neq 0$, comme $B^{2p} = 0$, il vient $2p \leq n$.

• Si $B^{2p-1} = 0$ comme $B^{2p-2} \neq 0$, il vient $2p - 1 \leq n$.

Donc dans tous les cas $p \leq \dfrac{n+1}{2}$.

2. (a) Si $P^2 - A - 1$ est un polynôme annulateur de A, alors X^p divise $P^2 - X - 1$ (d'après la définition du polynôme minimal). Inversement, supposons qu'il existe un polynôme Q tel que $P^2 - X - 1 = X^p Q$, alors comme $A^p = 0$, alors $P^2(A) - A - I_n$=0. D'où l'équivalence.

(b) On a $\sqrt{1+x} = Q_p(x) + a_p x^p + o(x^p) = Q_p(x) + a_p x^p + x^p \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ (le coefficient a_p est donnée par le développement limité de $\sqrt{1+x}$). Élevons au carré :

$$1 + x = Q_p(x)^2 + a_p^2 x^{2p} + x^{2p}(\varepsilon(x))^2 + 2a_p x^p Q_p(x) + 2x^p \varepsilon(x) Q_p(x) + 2a_p x^p \varepsilon(x)$$

$$\frac{1 + x - Q_p(x)^2}{x^p} = a_p^2 x^p + x^p(\varepsilon(x))^2 + 2a_p Q_p(x) + 2\varepsilon(x) Q_p(x) + 2a_p \varepsilon(x)$$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - Q_p(x)^2}{x^p} = 2a_p Q_n(0)$, par conséquent $x \mapsto \dfrac{Q_p(x)^2 - 1 - x}{x^p}$ admet une limite finie en 0.

D'autre part, par division euclidienne, il existe des polynômes Q et R tels que $Q_p^2 - X - 1 = X^p Q + R$ avec $R = 0$ eu $\deg(R) \leq p - 1$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{Q_p(x)^2 - x - 1}{x^p} - Q(x) = \dfrac{R(x)}{x^p}$, donc $x \mapsto \dfrac{R(x)}{x^p}$ admet une limite finie en 0. Supposons $R = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \beta_k X^k \neq 0$. Soit $i = \min\{k \in [\![1, p-1]\!] | \beta_k \neq 0\}$, alors $R(x) = \sum\limits_{k=i}^{p-1} \beta_k x^k \underset{0}{\sim} \beta_i x^i$, $\dfrac{R(x)}{x^p} \underset{0}{\sim} \beta_i \dfrac{1}{x^{p-i}}$, ce qui donne $\lim\limits_{x \to 0} \left| \dfrac{R(x)}{x^p} \right| = +\infty$. Donc nécessairement $R = 0$.

Finalement X^p divise $Q_p^2 - X - 1$ et donc $Q_p(A)$ est une racine carrée de $I_n + A$.

3. (a) Il suffit de remarquer que si A est nilpotente, alors il est de même de la matrice αA, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Soit R une racine carrée de $\dfrac{1}{\beta} A + I_n$ (il existe d'après la question précédente), donc $R^2 = \dfrac{1}{\beta} A + I_n$ et $\left(\sqrt{\beta} R\right)^2 = A + \beta I_n$ et par conséquent $\mathscr{R}_n(A + \beta I_n)$ est non vide.

4. Remarquons que $H = A + I_3$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A est nilpotente d'indice 3 ($A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$).

Donc une solution de l'équation $X^2 = H$ est donnée par $Q_3(A)$.

On a $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$. Donc $Q_3(A) = I_3 + \dfrac{1}{2} A - \dfrac{1}{8} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1}{2} & \dfrac{-1}{8} \\ 0 & 1 & \dfrac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie 4

Cas où A est une matrice symétrique réelle positive

1. Supposons $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$. Pour X vecteur propre associé à la valeur propre λ, on obtient ${}^tXAX = \lambda X^tX$ avec $X^tX > 0$ et donc $\lambda \geq 0$.
Réciproquement, supposons les λ_i sont tous positifs. Par le théorème spectral, on peut écrire $A = PD^tP$ avec P orthogonale et D diagonale. De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ de A. Pour toute colonne X, on a alors
${}^tXAX = {}^tYDY$ avec $Y = {}^tPX$ puis
${}^tXAX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq 0$. Donc A est positive.

2. (a) Application directe du théorème spectral.
(b) D'après la première question de cette partie, les valeurs propres de A sont positives, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} A &= P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_2}\right)P^{-1}P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_2}\right)P^{-1} \\ &= \left(P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_2}\right)P^{-1}\right)^2. \end{aligned}$$

Donc la matrice $S = P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_2}\right)P^{-1}$ répond bien à la question.

3. (a) On a
$$PD_1^2 = P_2^{-1}P_1D_1^2 = P_2^{-1}S_1P_1D_1 = P_2^{-1}S_1^2P_1 = P_2^{-1}S_2^2P_1 = D_2P_2^{-1}S_2P_1 = D_2^2P$$
(b) Posons $D_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $D_1 = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ et $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors l'égalité $PD_1^2 = D_2P$ est équivalente à $\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j}(\alpha_i^2 - \beta_i^2)$. Donc si $p_{i,j} = 0$, alors $\alpha_jp_{i,j} = \beta_ip_{i,j} = 0$ et si $p_{i,j} \neq 0$, alors $\alpha_i^2 = \beta_j^2$ et comme α_i et β_j sont positives $\alpha_i = \beta_j$ et par suite $p_{i,j}\beta_j = p_{i,j}\alpha_i$.
Dans tous les cas $p_{i,j}\alpha_i = p_{i,j}\beta_j$, donc en reprenant le calcul précédent en remplaçant α_i^2 par α_i et β_j^2 par β_j, on obtient $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $(PD_1)_{i,j} = (D_2P)_{i,j}$, c'est-à-dire $PD_1 = D_2P$. En remplaçant P par son expression, on obtient $P_1D_1P^{-1} = P_2D_2P_2^{-2}$, c'est-à-dire $S_1 = S_2$.

Partie 5

Étude d'un cas où A est une matrice complexe

1. Posons $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors $\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ sont les deux racines carrées de z, elles sont opposées, on choisit donc $y = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ comme l'unique complexe de partie réelle strictement positive vérifiant $y^2 = z$.

2. On sait que le produit X^2 est triangulaire supérieure. On pose $X^2 = (z_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors pour $1 \leq j < i \leq n$, on a $z_{i,j} = t_{i,j} = 0$ et $\forall i \in [1, n]$, $z_{i,i} = x_{i,i}^2$.
Si on a $X^2 = T$ alors nécessairement $\begin{cases} x_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leq i \leq n) \\ z_{i,j} = t_{i,j} & (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$
Mais pour tout couple (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= \sum_{k=1}^{i-1} x_{i,k}x_{k,j} + x_{i,i}x_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k}x_{k,j} + x_{i,j}x_{j,j} + \sum_{k=j+1}^{n} x_{i,k}x_{k,j} \\ &= (x_{i,i} + x_{j,j})x_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k}x_{k,j}. \end{aligned}$$

Donc

$$z_{i,j} = t_{i,j} \iff (x_{i,i} + x_{j,j})x_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k}x_{k,j}.$$

L'équation $X^2 = T$ est donc équivalente au système :

$$\begin{cases} x_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \le i \le n) \\ (x_{i,i} + x_{j,j})x_{i,j} = t_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k}x_{k,j} & (1 \le i < j \le n) \end{cases}.$$

Donc il faut montrer que le système admet des solutions. On cherche à construire une solution X telle que $x_{i,i} + x_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
• Pour les éléments en dessous de la diagonale, c'est-à-dire pour $i > j$ dans $[1, n]$, on pose $x_{i,j} = 0$ de sorte que X soit triangulaire supérieure .
• Pour les éléments de la diagonale, on choisit $x_{i,i}$ tel que $Re(x_{i,i}) > 0$ et $x_{i,i}^2 = t_{i,i}$, il y a un seul choix possible en fonction de $t_{i,i}$ d'après la première question de cette partie.
• Pour les éléments au dessus de la diagonale, on remarque d'abord que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $x_{i,i} + x_{j,j} \neq 0$, car $Re(x_{i,i} > 0)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On va construire les $x_{i,j}$ pour $1 \le i < j \le n$ par un procédé de récurrence sur $k = j - i \in [1, n-1]$ pour $1 \le i < j \le n$. On a :

$$x_{i,j} = \frac{1}{x_{i,i} + x_{j,j}} \left(t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k}x_{k,j} \right).$$

⋄ Pour $k = 1$, on pose pour $i \in [1, n-1]$:

$$x_{i,i+1} = \frac{1}{x_{i,i} + x_{i+1,i+1}} \left(t_{i,i+1} - \sum_{k=i+1}^{i+1-1} x_{i,k}x_{k,j} \right) = \frac{t_{i,i+1}}{x_{i,i} + x_{i+1,i+1}}.$$

⋄ Soit $k \in [1, n-2]$ tel que tous les coefficients $x_{i,j}$, ont été définis pour tout $i, j \in [1, n]$ tels que $j - i \le k$. Soit $i, j \in [1, n]$ tels que $j - i = k + 1$.
On remarque que $j - 1 = k + 1 \ge 2$ et ainsi $[i + 1, j - 1] \neq \emptyset$.
On pose $x_{i,j} = \dfrac{1}{x_{i,i} + x_{j,j}} \left(t_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j-1} x_{i,k}u_{k,j} \right)$, ce qui est possible car $x_{i,i}$, $x_{j,j}$, $x_{i,k}$ et $x_{k,j}$ pour $k \in [i + 1, j - 1]$ sont déjà définis, en effet $1 \le k - i \le j - i - 1 \le k$ et $1 \le j - k \le j - i - 1 \le k$.
La matrice T ainsi construite est telle que $x_{i,i} + x_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $X^2 = T$

3. A est trigonalisable car son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.
Comme A est inversible (0 ne figure pas parmi les valeurs propres) alors T l'est également, donc on peut appliquer la question précédente : il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = T$, et ainsi $A = \left(PTP^{-1}\right)^2$ donc A admet PTP^{-1} comme racine carrée.
Les valeurs propres de la racine carrée de A sont celles de T car elles sont semblables. Par hypothèse, la matrice triangulaire T a coefficients diagonaux dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Alors la question précédente, en reprenant la construction, les coefficients diagonaux de X sont des complexes de parties réelles strictement positives. Donc A admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

• • • • • • • • • • •