ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1976

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA — *Soit E un espace vectoriel réel normé, on dira que E est complet si toute suite de cauchy de E est convergente dans E. Si x est un élément de E la norme de x est noté $\| x \|$. Soit A une partie de E et f une application de A dans elle-même f sera dite contractante, s'il existe un nombre réel $0 < k < 1$ tel que pour tout couple (x, y) de points de A on ait $\| f(x) - f(y) \| \leqslant k \| x - y \|$. On dira qu'une partie A de E est fermée si pour toute suite $(x_n)_{n \in N}$ de A convergente dans E, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ est encore dans A. On dira que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.*

I/

1° Soit E un espace vectoriel réel normé, A une partie de E et f une application de A dans elle-même contractante. Soit $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n \in N}$ la suite définie par $x_n = f(x_{n-1})$ $\forall n \geqslant 1$. Montrer que $\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant$ à $k^n \| x_1 - x_0 \|$

2° Montrer que si (r, s) est un couple d'entiers positifs tels que $r < s$ alors $\| x_s - x_r \| \leqslant \frac{k^r}{1-k}$ $(x_1 - x_0)$

3° Montrer que si E est complet et si A est fermé la suite x_n est convergente dans A.

4° En déduire que si E est complet et A fermé l'application f de A dans elle même admet un point fixe et un seul.

5° Si E est complet et A fermé l'unique point fixe de f est appelé ℓ ; Montrer que si l'on remplace ℓ par x_r on peut évaluer un majorant de l'erreur commise en fonction de k, x_1 et x_0.

6° En utilisant ce qui a été fait précédemment, montrer que la suite $U_0 = 1$ $U_n = 1 + \sqrt{U_{n-1}}$ $n \geqslant 1$ est convergente. Calculer sa limite.

7° Soit une fonction continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, f dérivable sur $]0\ 1[$ et telle que pour tout x de $]0\ 1[$ $|f'(x)| \leqslant k$ avec $0 < k < 1$. Montrer en utilisant ce qui a été fait précédemment qu'il existe un unique $\ell \in [0\ 1]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

8° Interpréter géométriquement le résultat

9° Retrouver le résultat du 7° en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction convenable.

II/

E_a désigne l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[0\ a]$.

.../...

Pour tout $f \in E_a$ on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[o\,a]} |f(x)|$

$\|f\|_1 = \int_0^a |f(x)|\,dx$ et $\|f\|_2 = \left(\int_0^a |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$. On désigne par E_a^∞ E_a^1 E_a^2 les espaces normés obtenus en munissant E_a des normes précédentes. Pour tout f de E_a on pose $T(f)(x) = \int_0^x t f^2(t)\,dt + x$ pour $x \in [o\ a]$

1° Vérifier que $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont des normes sur E_a

2° Montrer qu'il existe deux constantes M et M' telles que $\|f\|_1 \leq M \|f\|_2 \leq M' \|f\|_\infty$ pour tout f de E_a.

3° On considère T comme application de E_a^∞ dans E_a^∞, est-elle continue ?

4° On considère T comme application de E_a^2 dans E_a^∞, est-elle continue ?

5° On considère T comme application de E_a^1 dans E_a^∞, est-elle continue ?

6° On désigne par $E_{a,m}$ l'ensemble des f de E_a telles que $\|f\|_\infty \leq m$ où $m \in \mathbb{R}_*^+$. On admettra que $E_{a,m}^\infty$ est complet.

Calculer en fonction de m la borne supérieure a_m des a tels que T applique $E_{a,m}$ dans lui-même et tels que T soit contractante.

7° Comment faut-il choisir m pour que a_m soit le plus grand possible.

8° Déduire du II (6°) et (7°) que l'équation différentielle $y' = x y^2 + 1$ admet une solution unique y_0 sur $[0\ 2^{-1/3}]$ telle que $y_0(0) = 0$ et $\|y_0\|_\infty \leq 2^{2/3}$.

9° Soit y_1 une solution de l'équation différentielle précédente sur $[0\ +\infty[$ telle $y_1(0) = 0$.

Montrer que pour tout a et b tels que $b > a > 0$

On a
$$\left[\frac{1}{y_1(x)} + \frac{x^2}{2}\right]_b^a = \int_a^b \frac{dx}{y_1^2(x)}$$

10° En déduire que y_1 n'existe pas.

III/

On considère $\mathbb{R}^n$ et l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie de la manière suivante :

si $x = (x_1\ x_2 \dots x_n)$ et si $f(x) = (X_1 \dots X_n)$ $\qquad X_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \qquad 1 \leq i \leq n$

1° Montrer que si $\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ l'application f admet un point fixe et un seul. On pourra considérer $\mathbb{R}^n$ muni de la norme indice infini c'est-à-dire $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$ et utiliser I.

2° Montrer que si $\sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ pour tout $1 \leq j \leq n$ l'application f admet un point fixe et un seul. On pourra considérer $\mathbb{R}^n$ muni de la norme indice un c'est-à-dire $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et utiliser I.

3° Soit A la matrice $(\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ et ${}^tA$ la matrice transposée de A. Montrer que ${}^tA.A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4° Montrer que si toutes les valeurs propres de ${}^tA.A$ sont strictement inférieures à 1 alors f admet un point fixe et un seul.

FIN