Soit k un entier pair supérieur ou égal à deux. On note E_k le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes homogènes à deux variables et de degré k à coefficients complexes, considérés comme applications de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$. On note E_k^0 le sous-espace vectoriel de E_k formé des polynômes P de E_k vérifiant $P(X, 0) = 0$.

Soit $M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices (2, 2) à coefficients complexes. Soit A un élément de $M_2(\mathbb{C})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice sur la base canonique est A. Pour P dans E_k on pose :

$$[P \mid A] = P \circ f_A$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on aura donc :

$$[P \mid A](X, Y) = P(aX + bY, cX + dY)$$

On note P_0 le polynôme de E_k défini par :

$$P_0(X, Y) = X^k - Y^k$$

Les lettres R, S et T désigneront les matrices suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on pose :

$$\mathcal{A}_k = \{ P \in E_k \text{ tels que } [P \mid S] + P = 0 \}$$

$$\mathcal{B}_k = \{ P \in E_k \text{ tels que } [P \mid STST] + [P \mid ST] + P = 0 \},$$

I

On rappelle que dans tout le problème l'entier k est supposé pair.

1° Soient A et B deux éléments de $M_2(\mathbb{C})$.

Montrer que l'application $P \longrightarrow [P \mid A]$ est un endomorphisme de E_k et que :

$$[P \mid AB] = [[P \mid A] \mid B]$$

2° *a.* Calculer S^2, ST, $(ST)^2$, $(ST)^3$.

b. Vérifier que $P_0 \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$.

3° Montrer que l'application $P \longrightarrow [P \mid T] - P$ est une application linéaire surjective de E_k sur E_k^0.

4° Soit P un élément de E_k. Montrer qu'il existe un élément Q de E_k et un nombre complexe a tels que :

$$P = aP_0 + (Q - [Q \mid S]) + ([Q \mid ST] - Q).$$

5° En déduire que $E_k = \mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k$.

II

1° Expliciter une base de $\mathcal{A}_k$ et calculer la dimension de $\mathcal{A}_k$.

2° *a.* Diagonaliser la matrice ST ;

b. En déduire la diagonalisation de l'endomorphisme $P \longrightarrow [P \mid ST]$ de E_k.

3° Expliciter une base de $\mathcal{B}_k$ et calculer la dimension de $\mathcal{B}_k$.

4° En déduire la dimension de $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ selon les valeurs de k modulo 12.

On calculera en particulier cette dimension pour $k = 2, 4, 6, 8, 10$ et 12.

III

On dira qu'un polynôme P de E_k est pair si $P(-X, Y) = P(X, Y)$, et impair si $P(-X, Y) = -P(X, Y)$. D'autre part, on notera φ l'endomorphisme $P \longrightarrow [P \mid R]$ de E_k.

1° Montrer que :

$$\varphi(\mathcal{A}_k) = \mathcal{A}_k \ ; \quad \varphi(\mathcal{B}_k) = \mathcal{B}_k \ ; \quad \varphi(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k) = \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k.$$

2° Montrer que si $P(X, Y) \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ alors :

$$P(-X, Y) \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$$

(on pourra exprimer la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de R et S).

3° Notons U_k^0 le sous-espace vectoriel de E_k engendré par P_0.

Notons U_k^+ (respectivement U_k^-) l'ensemble des polynômes pairs (respectivement impairs) appartenant à $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k \cap E_k^0$.

Démontrer que : $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k = U_k^0 \oplus U_k^+ \oplus U_k^-$

4° On note φ_1, φ_2, φ_3 les restrictions de φ à $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ respectivement.

a. Calculer les traces de φ, φ_1 et φ_2.

b. En déduire la trace de φ_3.

5° Montrer que $\dim U_k^+ = \dim U_k^-$.

6° Expliciter une base de $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ pour $k = 2, 4, 6, 8, 10$ et 12.

FIN