

Un corrigé

Partie I On rappelle que E_k est le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par les polynômes $(X^n Y^{k-n})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$; c'est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $k + 1$.

1. Soit $P, Q \in E_k$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} [P + \lambda Q|A] &= (P + \lambda Q)(aX + bY, cX + dY) \\ &= P(aX + bY, cX + dY) + \lambda Q(aX + bY, cX + dY) \\ &= [P|A] + \lambda[Q|A]. \end{aligned}$$

Donc l'application est bien linéaire.

Si $P = \sum_{n=0}^k a_n X^n Y^{k-n}$ est un polynôme homogène de degré k , alors pour tout $t \in \mathbb{C}$:

$$[P|A](\lambda X, \lambda Y) = P(f_A(\lambda X, \lambda Y)) = P(\lambda f_A(X, Y)) = \lambda^k P(f_A(X, Y)) = \lambda^k [P|A](X, Y)$$

Ainsi, $[P|A]$ est bien un élément de E_k .

D'autre part, $\forall P \in E_k, [P|A] \in E_k$. En effet, soit $P(X, Y) = \sum_{n=0}^k a_n X^n Y^{k-n} \in E_k$, on a :

$$\begin{aligned} [P|A](tX, tY) &= \sum_{n=0}^k a_n (atX + btY)^n (ctX + dtY)^{k-n} \\ &= t^k \sum_{n=0}^k a_n (aX + bY)^n (cX + dY)^{k-n} \\ &= t^k [P|A](X, Y) \end{aligned}$$

Ainsi, $[P|A]$ est un polynôme homogène de degré k , ce qui prouve que $[P|A] \in E_k$. L'application est donc bien un endomorphisme de E_k .

Soient A et B deux matrices de $M_2(\mathbb{C})$. On note f_A et f_B les endomorphismes de \mathbb{C}^2 associés. Par définition, $[P|A] = P \circ f_A$.

Enfin, la matrice du produit AB correspond à la composée des applications linéaires $f_A \circ f_B$. Donc :

$$[P|AB] = P \circ f_{AB} = P \circ (f_A \circ f_B)$$

Posons $Q = [P|A] = P \circ f_A$. Alors :

$$[[P|A]|B] = [Q|B] = Q \circ f_B = (P \circ f_A) \circ f_B$$

Par associativité de la composition de fonctions :

$$P \circ (f_A \circ f_B) = (P \circ f_A) \circ f_B$$

D'où la relation demandée :

$$[P|AB] = [[P|A]|B].$$

2. (a) On trouve $S^2 = -I$, $ST = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $(ST)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(ST)^3 = I$.

(b) Vérification de $P_0 \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$: On a

$$([P_0|S] + P_0)(X, Y) = P_0(Y, -X) + P_0(X, Y) = Y^k - (-X)^k + X^k - Y^k = 0,$$

car k est pair et

$$\begin{aligned} ([P_0|(ST)^2] + [P_0|ST] + P_0)(X, Y) &= P_0(-X - Y, X) + P_0(Y, -X - Y) + P_0(X, Y) \\ &= (-X - Y)^k - X^k + Y^k - (-X - Y)^k + X^k - Y^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $P_0 \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$.

3. Il est clair que l'application $\Phi : P \mapsto [P|T] - P$ est linéaire. Elle est à valeur dans E_k^0 , puisque, si $P \in E_k$,

$$([P|T] - P)(X, 0) = P(X, 0) - P(X, 0) = 0.$$

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_k)$ la base canonique de E_k où $e_i = X^{k-i}Y^i$. Le sous-espace E_k^0 est défini par $\{Q \in E_k \mid Q(X, 0) = 0\}$. Un polynôme de E_k^0 est de la forme $Q(X, Y) = \sum_{i=1}^k a_i X^{k-i}Y^i$. C'est un

espace de dimension k dont une base est (e_1, e_2, \dots, e_k) .

Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, on a :

$$\Phi(e_i) = (X + Y)^{k-i}Y^i - X^{k-i}Y^i$$

D'après la formule du binôme :

$$\Phi(e_i) = \left(\sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} X^{k-i-j}Y^j - X^{k-i} \right) Y^i = \sum_{j=1}^{k-i} \binom{k-i}{j} X^{k-i-j}Y^{i+j}$$

Le terme de plus bas degré en Y de $\Phi(e_i)$ est $(k-i)X^{k-i-1}Y^{i+1}$, soit $(k-i)e_{i+1}$.

La famille $(\Phi(e_0), \Phi(e_1), \dots, \Phi(e_{k-1}))$ est constituée de k vecteurs. Dans la base (e_1, \dots, e_k) de E_k^0 , la matrice de cette famille est triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} k & \times & \dots & \times \\ 0 & k-1 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients diagonaux $k, k-1, \dots, 1$ étant tous non nuls, le rang de Φ est égal à k . Donc $\dim(\text{Im } \Phi) = k = \dim E_k^0$. L'application est donc surjective de E_k sur E_k^0 .

4. Soit $P = \sum_{n=0}^k a_n X^n Y^{k-n} \in E_k$. On a :

$$P = a_0 Y^k + \sum_{n=1}^{k-1} a_n X^n Y^{k-n} + a_k X^k - a_k Y^k + a_k Y^k = a_k (X^k - Y^k) + R$$

avec $R = a_0 Y^k + \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n Y^{k-n} + a_k Y^k \in E_k^0$. D'après 3., il existe $Q_1 \in E_k$ tel que $[Q_1|T] - Q_1 = R$.

Soit maintenant $Q = [Q_1|S^{-1}]$, on obtient donc :

$$[Q|ST] - [Q|S] = [[Q_1|S^{-1}]|ST] - [[Q_1|S^{-1}]|S] = [Q_1|T] - Q_1 = R,$$

d'où

$$P = a_k P_0 + (Q - [Q|S]) + ([Q|ST] - Q).$$

5. D'après la question précédente, il suffit de montrer que pour tout $Q \in E_k$, $Q - [Q|S] \in \mathcal{A}_k$ et $[Q|ST] - Q \in \mathcal{B}_k$ puisque $P_0 \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$. En effet, on a :

$$[Q - [Q|S]|S] + Q - [Q|S] = [Q|S] - [Q|S^2] + Q - [Q|S] = [Q|S] - [Q| - I] + Q - [Q|S].$$

Si $Q = \sum_{n=0}^k a_n X^n Y^{k-n}$, alors $[Q| - I](X, Y) = \sum_{n=0}^k a_n (-X)^n (-Y)^{k-n} = Q(X, Y)$ car k est pair. Donc $[Q - [Q|S]|S] + Q - [Q|S] = 0$, c'est-à-dire $Q - [Q|S] \in \mathcal{A}_k$.

De même, si on pose $P = [Q|ST] - Q$, on a :

$$\begin{aligned} [P|(ST)^2] + [P|ST] + P &= [Q|(ST)^3] - [Q|(ST)^2] + [Q|(ST)^2] - Q \\ &= [Q|I] - Q = Q - Q = 0. \end{aligned}$$

Donc $[Q|ST] - Q \in \mathcal{B}_k$.

Ainsi chaque élément de E_k s'écrit comme somme de deux éléments, l'un dans \mathcal{A}_k et l'autre d'autre dans \mathcal{B}_k .

Partie II

1. Soit $P = \sum_{n=0}^m a_n X^n Y^{k-n} \in \mathcal{A}_k$, donc $([P|S] + P)(X, Y) = P(Y, -X) + P(X, Y) = 0$ égalité qui s'écrit avec les coefficients de P sous la forme

$$\sum_{n=0}^k ((-1)^n a_n + a_{k-n}) X^{k-n} Y^n = 0$$

Donc pour tout $n \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $(-1)^n a_n + a_{k-n} = 0$ ou encore $a_{k-n} = (-1)^{n+1} a_n$. Posons $k = 2l$. Donc, en particulier, pour $n = l$ on obtient $a_l = (-1)^{l+1} a_l$, d'où $a_l = 0$ si l est pair.

En conclusion :

- Si $l = 2p$, la famille libre $(X^n Y^{k-n} + (-1)^{n+1} X^{k-n} Y^n)_{n \in \llbracket 0, l-1 \rrbracket}$ engendre \mathcal{A}_k , donc $\dim \mathcal{A}_k = \frac{k}{2}$.
 - Si $l = 2p + 1$, la famille libre $\{(X^n Y^{k-n} + (-1)^{n+1} X^{k-n} Y^n)_{n \in \llbracket 0, l-1 \rrbracket}, X^l Y^l\}$ engendre \mathcal{A}_k , donc $\dim \mathcal{A}_k = \frac{k}{2} + 1$.
2. (a) On a $ST = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(ST - xI) = x^2 + x + 1$. Donc les valeurs propres de ST sont j et j^2 ($j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$) et par conséquent ST est diagonalisable, des valeurs propres associées respectivement sont $v_1 = (1, j)$ et $v_2 = (1, j^2)$. On a la relation

$$ST = MDM^{-1}$$

avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

- (b) Notons φ l'endomorphisme de E_k définie par $\Phi(P) = [P|ST]$. On remarque que $\forall P \in E_k$, $\Phi^3(P) = [P|(ST)^3] = [P|P] = P$, donc le polynôme $X^3 - 1$ annule Φ , donc Φ est diagonalisable. On a, d'après la question précédente, $[P|ST] = [P|MDM^{-1}] = [[P|M]]D[M^{-1}]$. Notons ψ l'endomorphisme de E_k défini par $\psi(P) = [P|M]$ et ϕ_D l'endomorphisme de E_k défini par $\phi_D(P) = [P|D]$. L'égalité (*) s'écrit donc

$$\Phi = \psi \phi_D \psi^{-1}.$$

Or $\forall n \in \llbracket 0, k \rrbracket$,

$$\phi(X^n Y^{k-n}) = (jX)^n (j^2 Y)^{k-n} = j^{2k-n} X^n Y^{k-n},$$

ceci montre, une autre fois, que Φ est diagonalisable et que les valeurs propres sont exactement $1, j$, et j^2 .

Cherchons une base de diagonalisation de $P \mapsto [P|ST]$. Notons $L_1(X, Y)$ et $L_2(X, Y)$ les coordonnées d'un vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans la base de diagonalisation (v_1, v_2) . On a :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(X, Y) \\ L_2(X, Y) \end{pmatrix}$$

Cela nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} X = L_1 + L_2 \\ Y = jL_1 + j^2 L_2 \end{cases}$$

On obtient :

$$L_1(X, Y) = \frac{Y - j^2 X}{j - j^2} \quad \text{et} \quad L_2(X, Y) = \frac{jX - Y}{j - j^2}$$

Si on note u l'endomorphisme associé à ST , on a par définition :

$$L_1 \circ u = jL_1 \quad \text{et} \quad L_2 \circ u = j^2 L_2$$

L'opération $[P|ST]$ consiste à composer le polynôme par l'endomorphisme u . Pour un monôme de la forme $L_1^n L_2^{k-n}$, on applique la composition, d'où :

$$u(L_1^n L_2^{k-n}) = [L_1^n L_2^{k-n} | ST] = (L_1 \circ u)^n \cdot (L_2 \circ u)^{k-n} = (jL_1)^n \cdot (j^2 L_2)^{k-n} = j^{2k-n} (L_1^n L_2^{k-n}).$$

Cela prouve que chaque $L_1^n L_2^{k-n}$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $u : P \mapsto [P|ST]$ pour la valeur propre j^{2k-n} .

3. Soit $U = ST$ et $\chi : P \mapsto P \circ f_U$. Par définition on a :

$$\mathcal{B}_k = \{ P \in E_k \mid [P|U^2] + [P|U] + P = 0 \} = \{ P \in E_k \mid \chi^2(P) + \chi(P) + P = 0 \} = \ker(\chi^2 + \chi + Id).$$

L'égalité $\chi^3 = Id$ montre que les valeurs propres de χ sont dans $\{1, j, j^2\}$. La condition $\chi^2(P) + \chi(P) + P = 0$ est équivalent à P appartient à la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres j et j^2 . Soient n_1, n_j, n_{j^2} les multiplicités des valeurs propres $1, j, j^2$ dans le polynôme caractéristique de χ . Donc

$$\dim(\mathcal{B}_k) = n_j + n_{j^2} = \dim E_k - n_1 = k + 1 - n_1.$$

Soit $\Pi = \frac{1}{3}(Id + \chi + \chi^2)$, on a $\Pi^2 = \Pi$, donc Π est un projecteur et $\text{Im } \Pi = E_1(\chi)$ avec $E_1(\chi)$ est les sous-espace propre de χ associé à la valeur propre 1 , par conséquent :

$$\dim E_1(\chi) = n_1 = \text{Tr}(\Pi) = \frac{1}{3} (\text{Tr}(Id) + \text{Tr}(\chi) + \text{Tr}(\chi^2)).$$

Cherchons $\text{Tr}(\chi)$. D'après ce qui précède, χ se diagonalise par $d : P \mapsto [P|D]$ où $D = \text{diag}(j, j^2)$, donc $\text{Tr}(\chi) = \text{Tr}(d)$. Mais si $P_n = X^n Y^{k-n}$, on a :

$$d(P_n)(X, Y) = P_n(jX, j^2 Y) = (jX)^n (j^2 Y)^{k-n} = j^{2k-n} P_n.$$

D'où :

$$\mathrm{Tr}(\chi) = \sum_{n=0}^k j^{2k-n} = \sum_{n=0}^k j^{2k-n-3k} = \sum_{n=0}^k j^{k+n} = j^k \sum_{i=0}^k j^i = j^k \frac{1-j^{k+1}}{1-j}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0[3] \\ -1 & \text{si } k \equiv 1[3] \\ 0 & \text{si } k \equiv 2[3] \end{cases}$$

$$\text{De même, } \mathrm{Tr}(\chi^2) = \mathrm{Tr}(d^2) = \sum_{i=0}^k j^{2(k+i)} = j^{2k} \frac{1-j^{2(k+1)}}{1-j^2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0[3] \\ -1 & \text{si } k \equiv 1[3] \\ 0 & \text{si } k \equiv 2[3] \end{cases}.$$

- Si $k = 3m$, alors $\dim \mathcal{B}_k = 3m + 1 - \frac{1}{3}(3m + 1 + 1 + 1) = 2m = \frac{2k}{3}$.
- Si $k = 1 + 3m$, alors $\dim \mathcal{B}_k = 3m + 2 - \frac{1}{3}(3m + 2 - 1 - 1) = 2m + 2 = \frac{2k + 4}{3}$.
- Si $k = 2 + 3m$, alors $\dim \mathcal{B}_k = 3m + 3 - \frac{1}{3}(3m + 3 + 0 + 0) = 2m + 2 = \frac{2(k + 1)}{3}$.

Les monômes $M_n = L_1^{k-n} L_2^n$ sont vecteurs propres de $u : P \mapsto [P|ST]$ pour la valeur propre $\lambda_n = j^{k+n}$. Donc :

$$M_n \in \mathcal{B}_k \iff j^{k+n} \neq 1 \iff k + n \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Une base de \mathcal{B}_k est donc : $\{L_1^{k-n} L_2^n \mid n \in \{0, \dots, k\}, n \not\equiv -k \pmod{3}\}$.

4. Par la formule de Grassmann :

$$\dim(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k) = \dim(\mathcal{A}_k) + \dim(\mathcal{B}_k) - \dim(E_k)$$

D'où le tableau qui donne la dimension de $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ pour les valeurs $k \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$:

k	$\dim E_k = k + 1$	$\dim \mathcal{A}_k$	$\dim \mathcal{B}_k$	$\dim(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k)$
2	3	2	2	1
4	5	2	4	1
6	7	4	4	1
8	9	4	6	1
10	11	6	8	3
12	13	6	8	1

On a déjà exprimé $\dim \mathcal{A}_k$ et $\dim \mathcal{B}_k$ en fonction de $k \pmod{4}$ et $k \pmod{3}$. En combinant, on obtient une expression de $\dim(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k)$ selon $k \pmod{12}$. Posons $k = 12q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ (car k est pair). Le tableau suivant donne $\dim \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ suivant les valeurs de r .

r	$k \pmod{4}$	$\dim(\mathcal{A}_k)$	$k \pmod{3}$	$\dim(B_k)$	$\dim(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k)$
0	0	$6q$	0	$8q$	$2q - 1 = \frac{k}{6} - 1$
2	2	$6q + 2$	2	$8q + 2$	$2q + 1 = \frac{k}{6} + \frac{2}{3}$
4	0	$6q + 2$	1	$8q + 4$	$6q + 1 = \frac{k}{6} + \frac{1}{3}$
6	2	$6q + 4$	0	$8q + 4$	$2q + 1 = \frac{k}{6}$
8	0	$6q + 4$	2	$8q + 6$	$2q + 1 = \frac{k}{6} - \frac{1}{3}$
10	2	$6q + 6$	1	$8q + 8$	$2q + 3 = \frac{k}{6} + \frac{4}{3}$

L'étude des conditions imposées par les sous-espaces \mathcal{A}_k et \mathcal{B}_k permet de dresser le tableau récapitulatif suivant pour les valeurs de k demandées (k pair) :

Partie III

1. • Soit $P \in \mathcal{A}_k$. Par définition, $[P|S] = -P$ avec $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $Q = \varphi(P) = [P|R]$. Étudions $[Q|S]$:

$$[Q|S] = [[P|R]|S] = [P|RS]$$

Calculons les produits matriciels RS et SR :

$$RS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad SR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $RS = -SR$. Ainsi :

$$[Q|S] = [P| -SR]$$

Comme P est un polynôme homogène de degré k avec k pair, on a $[P| -M] = (-1)^k[P|M] = [P|M]$ pour toute matrice M . D'où :

$$[Q|S] = [P|SR] = [[P|S]|R]$$

Par hypothèse $P \in \mathcal{A}_k$, donc $[P|S] = -P$, ce qui donne :

$$[Q|S] = [-P|R] = -[P|R] = -Q$$

On en conclut que $Q \in \mathcal{A}_k$, donc $\varphi(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{A}_k$. Comme φ est une involution ($\varphi^2 = Id$), c'est un automorphisme et $\varphi(\mathcal{A}_k) = \mathcal{A}_k$.

• Soit $P \in \mathcal{B}_k$. On a $[P|(ST)^2] + [P|ST] + P = 0$. Posons $M = ST$. Soit $Q = \varphi(P) = [P|R]$. On a :

$$[Q|M^2] + [Q|M] + Q = [P|RM^2] + [P|RM] + [P|R]$$

On vérifie par le calcul que $RM = M^2R$ et $RM^2 = MR$. En effet :

$$RM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^2R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'expression devient :

$$[Q|M^2] + [Q|M] + Q = [P|MR] + [P|M^2R] + [P|R] = [(P|M] + [P|M^2] + P)|R]$$

Le terme entre parenthèses étant nul par définition de \mathcal{B}_k , on a $Q \in \mathcal{B}_k$.

• Puisque φ est un automorphisme qui stabilise \mathcal{A}_k et \mathcal{B}_k , il laisse stable leur intersection :

$$\varphi(\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k) = \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$$

2. On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont l'action sur un polynôme P correspond à la transformation $X \mapsto -X$:

$$[P|H](X, Y) = P(-X, Y)$$

Soit $P \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$. Montrons que $[P|H]$ appartient également à cet espace. En effet, d'après le produit matriciel effectué à la question précédente, nous avons :

$$RS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H$$

Par la propriété de composition des endomorphismes de E_k , il vient :

$$[P|H] = [P|RS] = [[P|R]|S]$$

On a :

- (a) D'après ce qui précède, l'espace $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ est stable par l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto [P|R]$. Ainsi, $[P|R] \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$.
- (b) En particulier, $[P|R] \in \mathcal{A}_k$. Par définition de cet espace, tout élément $Q \in \mathcal{A}_k$ vérifie $[Q|S] = -Q$. En appliquant cela à $Q = [P|R]$, on obtient :

$$[[P|R]|S] = -[P|R]$$

On aboutit à la relation :

$$[P|H] = -\varphi(P)$$

Comme $\varphi(P) \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ et que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E_k , son opposé appartient aussi à l'intersection.

En conclusion, si $P(X, Y) \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$, alors $P(-X, Y) \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$.

3. On note I_k le sous-espace vectoriel de E_k défini par $I_k = \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$. L'objectif est de montrer que cet espace se décompose selon la parité et l'annulation en $(1, 0)$.

Soit $P \in E_k$ un polynôme homogène de degré k . Il s'écrit sous la forme :

$$P(X, Y) = \sum_{i=0}^k a_i X^{k-i} Y^i = a_0 X^k + a_1 X^{k-1} Y + \dots + a_k Y^k$$

Donc

$$P \in E_k^0 \Leftrightarrow P(X, 0) = 0 \Leftrightarrow a_0 X^k = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0.$$

Mais $a_0 = P(1, 0)$, d'où :

$$E_k^0 = \{P \in E_k \mid P(1, 0) = 0\}.$$

C'est le noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(1, 0)$, donc un hyperplan de E_k . D'après la première partie, le polynôme $P_0(X, Y) = X^k - Y^k$ appartient à I_k et n'appartient pas à E_k^0 car $P_0(1, 0) = 1^k - 0^k = 1 \neq 0$.

Alors, on a la décomposition en somme directe :

$$I_k = \text{Vect}(P_0) \oplus (I_k \cap E_k^0) = U_k^0 \oplus (I_k \cap E_k^0).$$

Cherchons maintenant la décomposition de $I_k \cap E_k^0$ par la parité. Soit $P \in I_k \cap E_k^0$. D'après la question III. 2, le polynôme $P(-X, Y) \in I_k$. On peut alors décomposer P en sa partie paire P^+ et sa partie impaire P^- par rapport à la variable X :

$$P^+(X, Y) = \frac{P(X, Y) + P(-X, Y)}{2} \quad \text{et} \quad P^-(X, Y) = \frac{P(X, Y) - P(-X, Y)}{2}$$

Puisque I_k est un sous espace vectoriel, P^+ et P^- appartiennent à I_k . De plus E_k^0 est stable par l'opération $P(X, Y) \mapsto P(-X, Y)$. Donc $P^+ \in U_k^0$ et $P^- \in U_k^-$.

En conclusion, tout élément de $I_k \cap E_k^0$ se décompose de façon unique en une composante paire et une composante impaire. On aboutit donc à la structure demandée :

$$\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k = U_k^0 \oplus U_k^+ \oplus U_k^-$$

4. Calcul des traces de $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ et φ_3 :

- (a) **Calcul de la trace de φ** : L'endomorphisme φ est défini par $\varphi(P)(X, Y) = P(Y, X)$. Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_k)$ la base canonique de E_k où $e_i = X^{k-i} Y^i$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

L'image d'un vecteur de la base par φ est :

$$\varphi(e_i) = Y^{k-i} X^i = X^i Y^{k-i} = e_{k-i}$$

Donc $\text{Tr}(\varphi)$ est la somme des coefficients diagonaux de la matrice dans la base \mathcal{B} . Un coefficient diagonal est non nul (égal à 1) si et seulement si :

$$\varphi(e_i) = e_i \iff e_{k-i} = e_i \iff k - i = i \iff i = \frac{k}{2}$$

Puisque k est pair, l'équation $2i = k$ admet une unique solution entière $i = \frac{k}{2}$. Il n'y a donc qu'un seul élément égal à 1 sur la diagonale (correspondant au monôme central $X^{\frac{k}{2}}Y^{\frac{k}{2}}$), tous les autres étant nuls. D'où :

$$\text{Tr}(\varphi) = 1$$

Calcul de la trace de φ_1 : L'espace \mathcal{A}_k est le noyau de l'endomorphisme $(Id + u_S)$ où $u_S(P) = [P|S]$.

φ est l'endomorphisme $u_R(P) = [P|R]$.

Cherchons $\text{Tr}(\varphi|_{\mathcal{A}_k})$.

Le projecteur sur \mathcal{A}_k est donné par $p_{\mathcal{A}_k} = \frac{1}{2}(Id - u_S)$ car $u_S^2 = Id$ sur E_k (puisque $S^2 = -I$ et k est pair).

Alors :

$$\text{Tr}(\varphi_1) = \text{Tr}(u_R \circ p_{\mathcal{A}_k}) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(u_R) - \text{Tr}(u_R u_S))$$

On a $\text{Tr}(u_R) = \text{Tr}(\varphi) = 1$. Calculons maintenant $\text{Tr}(u_R u_S)$: On a :

$$RS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $[X^i Y^{k-i} | RS] = (-X)^i (Y)^{k-i} = (-1)^i X^i Y^{k-i}$.

La trace est donc la somme des $(-1)^i$ pour $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$:

$$\text{Tr}(u_R u_S) = \sum_{i=0}^k (-1)^i = 1 \text{ (car } k \text{ est pair)}$$

En remplaçant dans la formule :

$$\text{Tr}(\varphi_1) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0.$$

Autre méthode : Si $P \in \mathcal{A}_k \cap E_k^+$, alors $[P|S] = -P$ et $P(-X, Y) = P(X, Y)$, donc :

$$\varphi_1(P)(-X, Y) = \varphi(P)(-X, Y) = P(Y, -X) = [P|S](X, Y) = -P(X, Y)$$

donc $P \in \mathcal{A}_k \cap E_k^-$. L'opérateur φ_1 induit donc un isomorphisme entre $\mathcal{A}_k \cap E_k^+$ et $\mathcal{A}_k \cap E_k^-$. Leurs dimensions sont donc égales, comme $\varphi_1^2 = Id$ alors :

$$\text{Tr}(\varphi_1) = \dim(\mathcal{A}_k \cap E_k^+) - \dim(\mathcal{A}_k \cap E_k^-) = 0.$$

Calcul de $\text{Tr}(\varphi_2)$:

L'espace \mathcal{B}_k est défini par la relation : $u_{(ST)^2}(P) + u_{ST}(P) + P = 0$. Soit $v = u_{ST}$. Comme $v^3 = id$, l'opérateur $p_{\mathcal{B}_k} = \frac{1}{3}(2Id - v - v^2)$ est le projecteur sur \mathcal{B}_k . En effet, si on note p_1 le projecteur sur $E_1(v)$, p_j le projecteur sur $E_j(v)$ et p_{j^2} le projecteur sur $E_{j^2}(v)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v^n = p_1 + j^n p_j + j^{2n} p_{j^2}$$

ce qui donne $Id + v + v^2 = 3p_1 + (1 + j + j^2)p_2 + (1 + j + j^2)p_3 = 3p_1$, donc $p_{\mathcal{B}_k} = Id - p_1 = \frac{1}{3}(2Id + v + v^2)$.

La trace de la restriction φ_2 de $\varphi = u_R$ à \mathcal{B}_k est :

$$\text{Tr}(\varphi_2) = \frac{1}{3} (2\text{Tr}(u_R) - \text{Tr}(u_R u_{ST}) - \text{Tr}(u_R u_{(ST)^2}))$$

Pour k pair, on a :

— $\text{Tr}(u_R) = \text{Tr}(\varphi) = 1$.

— Soit $M_1 = R(ST) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire de diagonale $(-1, 1)$. Sa trace

sur E_k est $\sum_{i=0}^k (-1)^i = 1$.

— Soit $M_2 = R(ST)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire de diagonale $(1, -1)$. Sa

trace sur E_k est $\sum_{i=0}^k (1)^i (-1)^{k-i} = 1$.

D'où :

$$\text{Tr}(\varphi_2) = \frac{1}{3}(2(1) - 1 - 1) = 0$$

La trace reste nulle avec cette définition.

(b) Calcul de le trace de φ_3 :

Si l'on considère l'endomorphisme global φ sur E_k , et ses restrictions aux sous-espaces $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k$ et leur intersection $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$, on a la relation suivante (analogue à la formule de Grassmann pour les dimensions) :

$$\text{Tr}(\varphi_{|\mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k}) = \text{Tr}(\varphi_{|\mathcal{A}_k}) + \text{Tr}(\varphi_{|\mathcal{B}_k}) - \text{Tr}(\varphi_{|\mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k})$$

Comme ici $E_k = \mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k$ (car l'espace E_k est engendré par ces deux sous-espaces pour k pair), la relation devient :

$$\text{Tr}(\varphi) = \text{Tr}(\varphi_1) + \text{Tr}(\varphi_2) - \text{Tr}(\varphi_3)$$

En utilisant les calculs effectués dans les questions précédentes :

— $\text{Tr}(\varphi) = 1$ (trace de l'échange des variables sur l'espace total E_k , k pair).

— $\text{Tr}(\varphi_1) = 0$ (calculé en 4.a).

— $\text{Tr}(\varphi_2) = 0$ (calculé en 4.a).

On injecte ces valeurs dans la formule :

$$1 = 0 + 0 - \text{Tr}(\varphi_3)$$

D'où :

$$\text{Tr}(\varphi_3) = -1$$

5. On utilise la relation $[P|H] = -\varphi(P)$, $P \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{B}_k$ établie en III. 2 :

- Sur U_k° on a $\varphi(P_0) = -P_0$, donc -1 est une valeur propre.
- Si $P \in U_k^+$ alors P est pair, donc $[P|H] = P \implies \varphi(P) = -P$, ce qui tous les vecteurs de U_k^+ sont des vecteurs propres associés à -1 . Il y a exactement $\dim U_k^+$ vecteurs libres associés à -1 dans U_k^+ .
- Si $P \in U_k^-$ alors $[P|H] = -P$ et donc $\varphi(P) = P$, d'où 1 est une valeur propre de φ et tous les vecteurs de U_k^- sont des vecteurs propres associés à 1 .

